

Systematische

Entwickelung der gesamten Algebra.

I. Teil: Die vier Species

von

Dr. E. Suchsland.

Wissenschaftliche Beilage für das Programm des Gymnasiums zu Stolp.

STOLP, 1881.

F. W. Feige's Buchdruckerei in Stolp (Exped. der „Stolper Post“).

Progr. No. 116.

Vorwort.

Für ein wesentliches Hilfsmittel zur Erreichung eines guten Verständnisses der Mathematik auf höheren Lehranstalten halte ich ein Lehrbuch, dem der Lehrer seinen Vortrag eng anschliesst. Da ich aber noch keine so detailierte Ausarbeitung der Arithmetik kenne, wie ich sie meinen Schülern als Leitfaden wünsche, so will ich versuchen, die gesamte Algebra systematisch darzustellen. Ich hoffe, dass die Regeln der arithmetischen Lehrsätze, wenn sie von den Schülern zu Hause öfter ebenso klar nachgelesen werden können, wie sie in den Lektionen entwickelt sind, auf die Durchbildung des Geistes einen besseren Einfluss ausüben werden, als sie es jetzt thun, wo sie den Meisten als Kunststückchen erscheinen, welche nur sogenannte mathematische Köpfe fertig bringen könnten.

Als Ziel möchte ich von vorne herein eine sorgfältige Behandlung der Gleichungen angeben und bemerke gleich hier, dass es mich immer schmerzlich berührt hat, zu sehen, wie kurz oft in den Lehrbüchern die Gleichungen besprochen werden, und wie mit keinem Wort auf ihre eigentliche Stellung in der Algebra hingewiesen wird. Und doch sind es die Gleichungen, um derentwillen alle Rechenoperationen mit so viel Aufwand von Zeit und Mühe traktiert werden.

Ich übergebe im folgenden den ersten Teil meiner Arbeit den geehrten Fachgenossen zur gefälligen Beurteilung und werde mich sehr freuen, wenn derselbe einige Billigung findet. Bei der Darstellung des keineswegs leichten Stoffes bin ich bemüht gewesen, in der Entwickelung der Regeln zunächst langsam vorzugehen, ohne breit zu sein. Ich habe es deshalb nicht verschmäht, denselben Grund bei mehreren aufeinanderfolgenden Gelegenheiten des weiteren auszuführen. Hingegen habe ich, sobald ich glaubte, dass durch den öfteren Gebrauch die Gründe dem Schüler geläufig sein müssten, gar nicht mehr an dieselben erinnert. Es erscheint dann alles Übrige als Anwendung des Vorhergehenden. Als Hauptvorteil erwarte ich von diesem Verfahren, dass das Lehrbuch in gewissem Sinne auch zum Übungsbuch wird, und dann meine ich noch, dass dasselbe als Lexikon angesehen werden kann, in welchem derjenige, welcher mit der Anordnung des Stoffes vertraut ist, jederzeit schnell sich über ihm etwa entfallene Regeln Rat zu holen vermag. Mit Rücksicht hierauf habe ich eine sehr formale Bezeichnung der Zahlen gewählt und darf ich wohl auf eine freundliche Aufnahme für den sonst schon vergebenen Namen „congruente Zahlen“ rechnen.

Seinem

hochverehrten Lehrer

Herrn Dr. Buchbinder

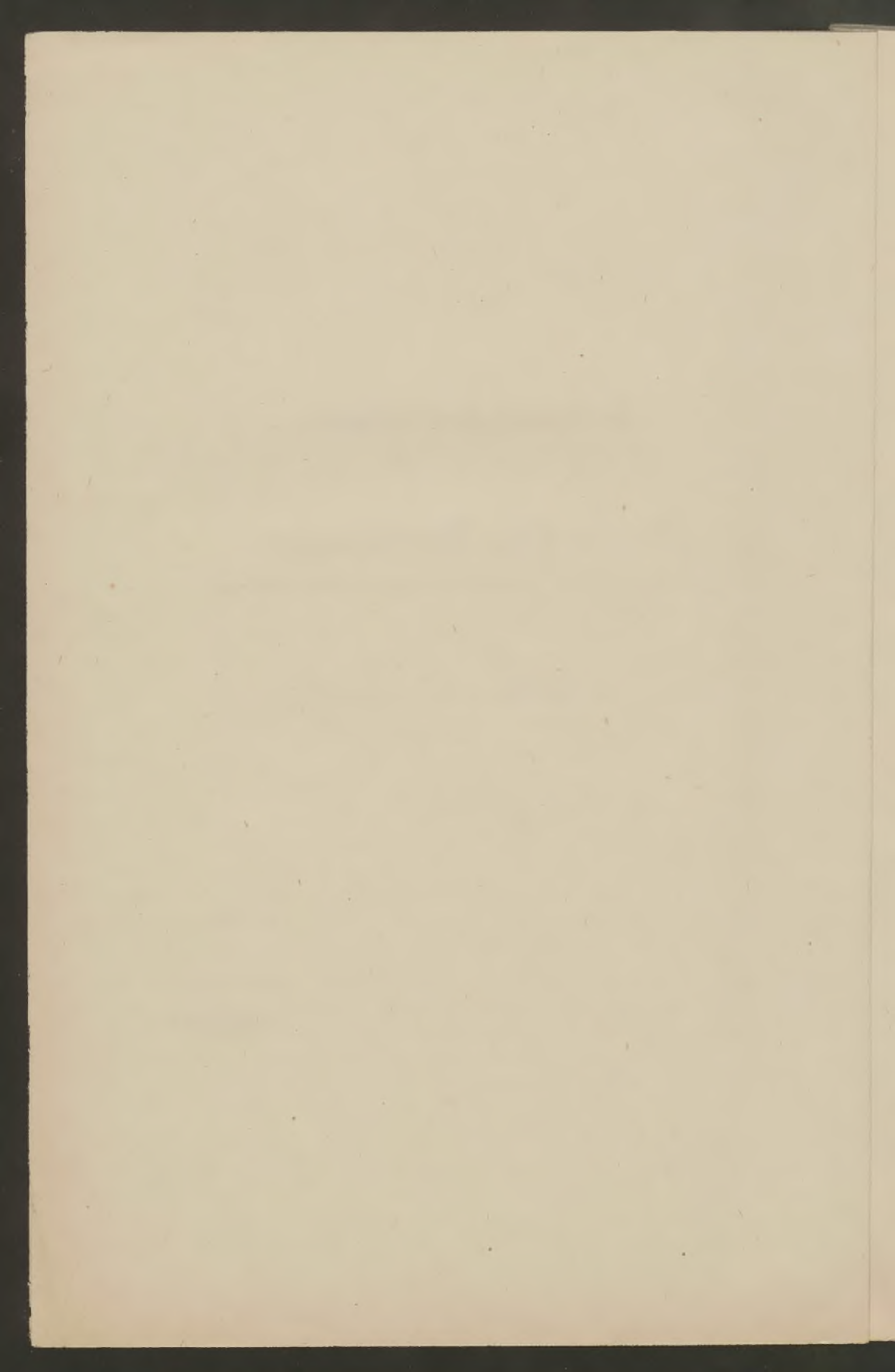
Professor an der Königlichen Landesschule Pforta

in dankbarer Erinnerung

gewidmet

vom

Verfasser.



§. 1.

„Rechnen“ heisst aus zwei oder mehreren gegebenen Zahlen nach bestimmten Regeln neue bilden. Die vier einfachsten Regeln, oder die vier Species, sind: Addition, Subtraction, Multiplication und Division; sie werden durch zwischen die gegebenen Zahlen gesetzte Rechenzeichen angedeutet und in bekannter Weise ausgeführt.

Wenn zur Bildung einer neuen Zahl nur zwei Zahlen gegeben sind, so können diese bloss durch ein Rechenzeichen mit einander verbunden sein, und man erhält die neue Zahl, indem man die angedeutete Rechenoperation mit den gegebenen Zahlen vornimmt. Soll indes eine neue Zahl aus mehreren gegebenen Zahlen gebildet werden, so werden diese im allgemeinen auch durch verschiedene Rechenzeichen verknüpft sein, und es fragt sich, in welcher Reihenfolge die Rechenoperationen auszuführen sind.

§. 2.

Um in dieser Beziehung einen einheitlichen Gang zu gewinnen, sind einige formale Festsetzungen getroffen. Zunächst sind die 4 Rechenzeichen

$$+ \quad - \quad . \quad :$$

in die zwei Abteilungen

$$+ \quad - \quad \text{und} \quad . \quad :$$

zergliedert, und es sind die ersten beiden die Rechenzeichen der niederen, die letzten beiden die Rechenzeichen der höheren Rechenoperationen genannt worden. Hierzu gilt die Regel, dass jede höhere Rechenoperation vor der ihr zunächst vorhergehenden niederen ausgeführt wird.

Weiter ist man überein gekommen, innerhalb der höheren und innerhalb der niederen Rechenoperationen die gegebene Reihenfolge zu beobachten.

Durch die angeführten beiden Gesetze erreichen wir in der Bildung neuer Zahlen aus beliebig vielen gegebenen eine vollständige Eindeutigkeit, aber es lässt sich auch sofort erkennen, dass wir durch die fraglose Unterordnung der niederen Rechenoperationen unter die höheren auf viele, vielleicht wertvolle Methoden, Zahlen zu bilden, verzichten.

Diesen Mangel beseitigen wir durch ein neues, nicht hoch genug zu schätzendes, Rechenzeichen, durch die sogen. Klammer. Eine Klammer verlangt, dass die in ihr angedeuteten Rechenoperationen vor den benachbarten ausgeführt werden. Steht in einer Klammer noch eine andere, so sind die Rechenoperationen in der inneren Klammer zuerst vorzunehmen. Innerhalb

der einzelnen Klammern gelten die früheren über die Reihenfolge der höheren und niederen Rechenoperationen gemachten Festsetzungen.

Es verträgt sich mit der Aufgabe der Klammern, dass wir sie auch da benutzen, wo zwischen Rechenzeichen derselben Ordnung eine Abweichung von der gegebenen Reihenfolge stattfinden soll, indem wir die Operationen, die den benachbarten vorgezogen werden müssen, in Klammern setzen.

§. 3.

Bei sorgfältiger Benutzung der nunmehr zu gebote stehenden Zeichensprache ist es möglich, alle räumlichen und zeitlichen Veränderungen in der Anzahl und, insofern ein Ganzes als eine Summe seiner Teile angesehen wird, auch in der Grösse der Körper eindeutig symbolisch wiederzugeben, z. B.:

Ein Vorrat Hafer von 7000 Klgr. wird zur Fütterung einer Anzahl Pferde verwendet. Von den zu Anfang vorhandenen 40 Pferden erhält jedes täglich 2 Klgr., als aber nach 7 Tagen 11 Stück aus der Verpflegung ausscheiden, bekommen die bleibenden pro Kopf $2^1/_2$ Klgr. Am 13. Tage kommen wieder 3 Pferde zu, und da wird die Ration der einen Hälfte auf 2 Klgr., die der anderen auf $2^1/_4$ Klgr. festgesetzt, bis am 17. Tage alle Pferde verkauft werden und abgehen. D. i. in Zeichen:

$$\left|\left(7000 - (40 \,.\, 2) \,.\, 7\right) - \left((40 - 11) \,.\, 2^1/_2\right) .\, 5\right|$$
$$- \left[\left|\left((40 - 11) + 3\right) : 2\right| .\, 2^1/_2 + \left|\left((40 - 11) + 3\right) : 2\right| 2^1/_4\right] .\, 4.$$

Wenn wir die angedeuteten Rechenoperationen ausführen, so erhalten wir als Resultat $5773^1/_2$, und weil dasselbe mit Notwendigkeit aus dem Aggregat folgt, so nennen wir das Resultat dem Aggregat gleich. Also der Begriff des „Gleichen“ liegt hier in der Notwendigkeit, mit welcher den getroffenen Festsetzungen gemäss das Resultat aus dem Aggregat durch Ausführung der Rechenoperationen hervorgeht.

§, 4.

Angenommen, wir hätten die Aggregate $(7 + 2) \,.\, 3 - 5 + 6 : 2$ und $48 - 6 \,.\, 7 + (4 - 1) \,.\, 2 + 13$, so sehen wir nach Ausführung der Rechenoperationen, dass beide das Resultat 25 geben, d. h. wir haben

$$(7 + 2) \,.\, 3 - 5 + 6 : 2 = 25$$

und $48 - 6 \,.\, 7 + (4 - 1) \,.\, 2 + 13 = 25.$

Mit der Erweiterung des Begriffes gleich dehnt sich auch das Gebiet der Anwendung der dahin einschlagenden Grundsätze aus und es fordert der Satz: Wenn zwei Grössen u. s. w., dass wir sagen:

$$(7 + 2) \,.\, 3 - 5 + 6 : 2 = 48 - 6 \,.\, 7 + (4 - 1) \,.\, 2 + 13.$$

Demzufolge definieren wir zwei Aggregate als gleich, wenn beide dasselbe Resultat liefern, und wir können eine Gleichsetzung zweier Aggregate nur

vornehmen, wenn wir uns durch Ausführung der Rechenoperationen von der Identität der Resultate überzeugt haben.

Insofern es uns also nur auf das Resultat ankommt, wird es erlaubt sein, für ein Aggregat ein anderes zu setzen, welches ihm gleich ist. Wie aber, wenn uns ausser dem Resultat auch der Weg von Wichtigkeit ist, auf dem wir zu ihm gelangen? Und der Weg, d. i. die Art und Weise des Verlaufes einer Handlung oder eines Vorganges wird genau wiedergegeben durch die Zusammensetzung, die Form, des Aggregates. Offenbar wird durch Einsetzung eines anderen Aggregates ein von dem ersten verschiedener Weg proponiert, aber das ist kein Nachteil, vielmehr werden wir, falls wir vielleicht nur die eine Methode, zu einem bestimmten Ziel zu gelangen, kannten, dadurch, dass wir dasselbe Resultat auch bei einem anderen Aggregat bemerken, noch auf eine zweite, dritte, vierte etc. aufmerksam gemacht, von denen eine unter Umständen den Vorzug verdient. Und so lässt sich vermuthen, dass es bequem ist, eine Anzahl gleicher, aber in der Form verschiedener Aggregate zusammenzustellen, um je nach dem Vorteil, den das eine oder andere in einem speciellen Falle bietet, unter ihnen auszuwählen.

Beispiel. Ein Lehrer der griechischen Sprache kommt an einen Abschnitt Vokabeln, der 361 Stück umfasst. Um sich einen Lehrplan zu entwerfen, stellt er 361 als Resultat folgender Ausdrücke dar:

$$10 . 19 + 9 . 19. \qquad 10 . 15 + 9 . 15 + 10 . 4 + 9 . 4,$$
$$10 . 15 + 8 . 9 + 7 . 9 + 10 . 5 + 9 . 4.$$

Wie ist jeder Ausdruck im vorliegenden Fall zu deuten?

§. 5.

Unwillkürlich erschrickt man beim Beginn dieser Arbeit vor der unendlichen Mannigfaltigkeit, mit der gegebene Zahlen in Aggregate zerlegt werden können, und sieht sich nach einem leitenden Faden für das sich aufthuende Labyrinth um. Das Knäuel, von dem der rettende Faden abgewickelt wird, ist der Begriff der allgemeinen Zahl. Derselbe wird, wie folgt, gewonnen:

Ausgesprochenermassen handelt es sich uns nicht sowohl um bestimmte Werte, welche sich als Resultate der Aggregate ergeben sollen, sondern um die Form (den Typus, die Bauart) der Aggregate, weil sich in ihr das Wesen des Herganges wiederspiegelt. Diese Form kann aber auch aufrecht erhalten werden, wenn wir die bisher gebrauchten Ziffern durch andere Zeichen ersetzen, z. B. durch die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets, und dabei die Festsetzung treffen, dass es jedem gestattet sein soll, an die Stelle eines Buchstabens eine beliebige ganze Zahl gesetzt zu denken; jedoch mit der Einschränkung, dass Verschiedenheit der Buchstaben Ungleichheit der Zahlen, Identität der Buchstaben Gleichheit der Zahlen bedeutet. Wegen der Wandelbarkeit des mit den Buchstaben verknüpften Zahlenbegriffs heissen die Buchstaben unbestimmte und im gegensatz zu ihnen die bisherigen Ziffern mit ihrer Eindeutigkeit bestimmte Zahlen.

Um uns zunächst etwas mit den neuen Grössen zu befreunden, nehmen wir die bekannten 4 Species genau an ihnen durch.

§. 6.

Addition.

Vorbetrachtung. Wenn man mehrere Gruppen von derselben Einheit hat und sie sämtlich zu einer Gruppe verschmilzt, so sagt man, die Gruppen seien zu einander addiert.

Definition. Beliebig viele Zahlen a, b, c . . . . zu einander addieren, heisst eine neue Zahl finden, welche so viel Einheiten hat, als a, b, c . . . . zusammen.

a, b, c . . . . werden Summanden oder Posten, die neue Zahl wird Summe genannt.

Die neue Zahl wird also nur von einer Menge Einheiten und nicht von der Reihenfolge bestimmt, in welcher die Einheiten zu einander kommen. Das drücken wir in Zeichen durch die Gleichungen aus:

$a + b + c + d \ldots = a + d + c + b + \ldots = a + \ldots b + c + d =$ etc.

und sehen zugleich, dass wir, ohne die Eindeutigkeit des Resultates in Frage zu stellen, für den Fall der Addition ganzer Zahlen zu einander, von dem zuerst gegebenen Gesetz über die Reihenfolge der Operationen dispensiert sind.

Discussion über die Möglichkeit des Addierens. Da wir es hier nur mit ganzen Zahlen zu thun haben, so ist es stets möglich, eine Zahl zu finden oder gefunden zu denken, welche so viel Einheiten umfasst, wie beliebig viele gegebene Zahlen zusammen, und daher dürfen wir auch umgekehrt jede ganze Zahl als Resultat einer Addition anderer kleinerer ganzen Zahlen ansehen, d. h. wir können an die Stelle z. B. von a setzen $(m + n + r)$. Die Klammer als Rechenzeichen behalten wir bei. Weil aber ein Ausführen der Rechenoperationen in dem früheren Sinne wegen der Unbestimmtheit der allgemeinen Zahlen nicht vorgenommen werden kann, so bedeutet die Klammer hier, dass die Rechenoperationen ausgeführt zu denken sind. Deshalb ist, wenn $m + n + r = a$ ist, $(m + n + r) \equiv a$. ($\equiv$ bedeutet identisch.)

§. 7.

Subtraction.

Vorbetrachtung. Wenn man zwei Gruppen derselben Einheit hat und sie in Bezug auf ihre Anzahl mit einander vergleichen will, so sagt man: Um wie viel Einheiten ist die eine Gruppe grösser als die andere? Man kann die Frage so beantworten, das man zu der kleineren Gruppe so viel Einheiten zufügt, dass die entsprechende Summe gleich der anderen gegebenen Gruppe ist.

Definition. Eine Zahl s von einer anderen m subtrahieren, heisst eine dritte Zahl d finden, welche zu s addiert m giebt.

Die termini technici für die 3 Zahlen in ihrer Stellung zu einander sind: m Minuend, a Subtrahend, d Differenz oder Rest.

Die symbolische Schreibweise für die in der Definition angegebenen, zwischen m, s und d bestehenden Beziehungen ist:

$$m - s = d.$$

Discussion über die Möglichkeit des Subtrahierens. Die Subtraktion setzt die Kenntnis der Regeln der Addition voraus und will diese als Controle für die Richtigkeit der ausgeführten Subtraktion angewendet wissen. Nach den geläufigsten Anschauungen, die unseren bisherigen Zahlen als Quelle zu grunde liegen, können wir daher zunächst nur schliessen, dass die Möglichkeit der Subtraktion von der Bedingung $m > s$ abhängt, und umgekehrt ist jede Zahl als Resultat einer Subtraktion darstellbar, d. h. wir dürfen an Stelle z. B. von a setzen $\left\{(1 + a) - 1\right\}$

$$a \equiv \left\{(1 + a) - 1\right\}$$

Das, was uns die Beschränkung $m > s$ auferlegt, ist, dass uns keine Zahlen geläufig sind, welche, zu den gewöhnlichen addiert, dieselben verringern. Nun, wenn wir sie auch bisher nicht kannten, so wollen wir hier solche schaffen und erleichtern uns diese Neubildung, indem wir uns abstrakter Grössen erinnern, die zu einander gefügt, sich ganz oder teilweise aufheben, z. B. Capital und Schulden, Schritte in entgegengesetzten Richtungen, Kälte- und Wärmegrade. Zur Bezeichnung der neuen Art Zahlen benutzen wir gleichfalls entweder die Ziffern oder die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets, machen sie aber dadurch kenntlich, dass wir vor sie ein „—" setzen und dieses mit ihnen durch eine Klammer zu einem Ganzen verbinden $(- c)$. Wir nennen sie subtraktive oder negative Zahlen. Eine subtraktive Zahl ist also eine solche, welche zu einer gewöhnlichen Zahl addiert, dieselbe um so viel verringert, als die zu ihrer Darstellung benutzte gewöhnliche Zahl Einheiten hat.

Die neuen subtractiven Zahlen sind der Anlass gewesen, zu ihnen im gegensatz die bisherigen Zahlen additive Zahlen zu nennen und analog zu schreiben $(+ c)$. Findet ein solcher Gegensatz nicht statt, so nennen wir von jetzt ab die bisherigen Zahlen absolute. An Stelle einer negativen Zahl kann stets eine Differenz gesetzt werden, deren Minuend um die betreffenden Einheiten kleiner ist, als der Subtrahend.

$$(- c) \equiv \left\{u - (u + c)\right\}$$

Wenn $m > s$ und $m - s = d$ ist, ist $s - m = (- d)$, also

$$s - m = \Big(- (m - s)\Big).$$

Diese Gleichung besteht für uns, wenn wir das Grössenverhältnis von m und s kennen. Wie aber, wenn das nicht der Fall ist? Dürfen wir dann auch setzen $s - m = \Big(- (m - s)\Big)$? Angenommen, wir hätten das gethan, und es stellte sich nachher heraus, dass $s > m$ wäre, was ergiebt sich? Da $m < s$, so ist $(m - s) \equiv (- d)$ und $s - m = d$, also $d = \Big(- (- d)\Big)$.

$\Big(- (- d)\Big)$ entspricht nichts Realem und ist deshalb undenkbar. Wir

werden also durch etwas Unmögliches darauf aufmerksam gemacht, dass wir eine nicht statthafte Umstellung von Minuend und Subtrahend vorgenommen haben oder anders: Wir dürfen stets, ohne Rücksicht auf die Grössenverhältnisse von m und s zu einander, für s — m $\left(-(m - s)\right)$ setzen, wenn wir die Festsetzung treffen, dass $\left(-(-d)\right) = + d$ sein soll. Das geschieht hiermit.

Noch bleibt zu erörtern, was wir unter dem Resultat von m — s verstehen müssen, wenn s = m. Nach der Definition soll eine Zahl gesucht werden, welche zu m addiert m giebt. Diese Forderung erinnert an das Nichts. Hier, wo wir von dem Vorhandensein mindestens einer Einheit plötzlich zu nichts kommen, vermögen wir mit unserer Vorstellung nicht zu folgen und müssen, um den Grenzfall m — m nicht ausser Augen zu verlieren, denselben in der Form weiterführen, in der er sich uns zuerst gezeigt hat. Der Kürze wegen nehmen wir für m — m das Symbol 0 und nennen dasselbe Null. Null ist demnach eine Differenz zweier gleichen ganzen Zahlen, und wir haben mit ihm, da uns die Anschauung fehlt, sehr vorsichtig zu sein.

§. 8.

Multiplication.

Vorbetrachtung. Bei der Addition haben wir gesehen, dass der Wert einer Summe nur abhängig ist von der Grösse der einzelnen Summanden. Ein wenig anders müssen wir dies aussprechen, wenn in einer Summe sämtliche Summanden einander gleich sind, wie z. B. in

$$a + a + a + \ldots\ldots + a.$$

Hier sagen wir: Der Wert der Summe hängt ab von der Grösse eines Summanden und der Anzahl der Summanden. Da nur zwei Zahlen in Betracht kommen, so brauchen wir auch nur, um vollständig über die specielle Summe orientiert zu sein, zwei Zahlen für sie hinzuschreiben. Es geschieht das, wenn der Summand a, und die Anzahl der Summanden m ist, in der Weise, dass wir setzen

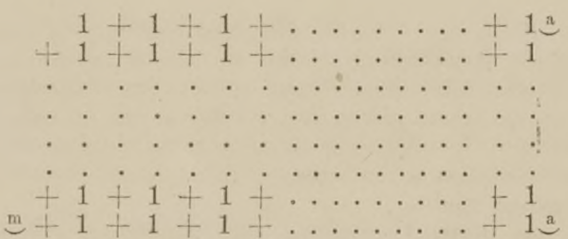
$$a + a + \ldots\ldots + a = a \,.\, m$$

und umgekehrt, wenn wir das Symbol am sehen, so steht das für a + a + a + ... + a. Demnach ist a . m für uns zunächst ganz verschieden von m . a, welches für m + m + ... + m die abgekürzte Form ist.

Man hat sich daran gewöhnt, die angeführte specielle Addition mit dem Namen Multiplikation zu belegen und nennt in der Form a . m a Multiplikand, m Multiplikator. Das Resultat der ausgeführt gedachten Addition heisst Produkt.

Definition. a mit m multiplicieren, heisst eine dritte Zahl c bilden, welche aus a ebenso entstanden ist, wie m aus der Einheit.

Discussion über die Möglichkeit des Multiplicierens. Um über die Anzahl Einheiten, welche das Produkt (am) enthält, einen guten Ueberblick zu gewinnen, ordnen wir uns dieselben in Form eines Rechteckes, dessen horizontale Seite a und dessen vertikale Seite m Einheiten aufnimmt.



In ähnlicher Weise stellen wir die Einheiten des Produktes (m . a) auf:

$$\begin{array}{l} 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1\overset{m}{\smile} \\ + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1 \\ \overset{a}{\smile} + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1\overset{m}{\smile} \end{array}$$

Die Anschauung lehrt, dass durch einfaches Drehen das zweite Rechteck mit dem ersten identisch wird; daraus folgern wir, dass in beiden Rechtecken gleichviele Einheiten stehen und hieraus wieder, dass die Symbole, welche uns die Rechtecke repräsentieren, einander gleichgesetzt werden müssen, d. i.

$$a . m = m . a.$$

a und m sind absolute Zahlen. Wegen der Gleichwertigkeit des Multiplikanden und des Multiplikators in der Stellung führen beide den gemeinschaftlichen Namen „Faktoren".

So lange a und m absolute ganze Zahlen sind, tritt uns für die Ausführbarkeit der durch a . m angedeuteten Rechenoperation kein Bedenken entgegen; umgekehrt aber können wir nicht jede ganze Zahl als Resultat einer Addition von lauter gleichen Summanden (1 ausgeschlossen), d. h. einer Multiplikation ansehen. Wir vermögen also nicht jeder ganzen Zahl die Form a . m zu geben. Der Grund hierfür liegt in folgenden Betrachtungen:

Wir wissen, dass Zahlen abstrakte Begriffe sind, welche wir durch häufiges Anschauen mehrerer gleichartiger Grössen gewinnen. Der vielfache Gebrauch macht uns aber die Zahlen so geläufig, dass wir ganz ihre Quelle vergessen und es uns im gegenteil Mühe kostet, einzusehen, dass die Zahlenbegriffe äusseren Eindrücken ihre Entstehung verdanken. Die bequemsten Anschauungsobjekte für die Zahlen erhält man durch Punkte, welche nach einem bestimmten Gesetz auf einer Geraden aufgetragen werden. Schneiden wir nämlich auf der Geraden MN z. B. vom

M————A.—.—.—.—.—.—.—.—.—.—.—.—.——————N
1 2 3 4 5 6 7 8 9 p

Punkte A aus ein Stück gleich der Längeneinheit ab, so können wir den Endpunkt der Strecke als Anschauungsobjekt für die Zahl 1 ansehen, von diesem Endpunkt aus schneiden wir wieder auf der Geraden die Längeneinheit ab, dann müssen wir den nunmehrigen Endpunkt der Strecke als Anschauungsobjekt der Zahl 2 annehmen. Durch Fortsetzung des Abtragens der Längen-

einheit erhalten wir lauter Punkte, die unseren Begriffen für ganze Zahlen als vollbefriedigende Anschauungsobjekte zu dienen vermögen, und da wir doch in letzter Instanz alle Beweise auf einfache Anschauungen zurückführen, so wollen wir unsere eben gewonnene Kenntnis der gesetzmässigen Punktreihe zur Feststellung der Behauptung verwenden, dass nicht jede Zahl sich als Produkt von der Form a . m auffassen lässt, wenn die Werte a = 1 und m = 1 ausgenommen sind.

Die Zahl, um deren Darstellung als Produkt es sich handelt, sei p. Das Objekt ihrer Anschauung befinde sich an der Stelle der Geraden, welche mit p markiert ist. Wenn p die Form eines Produktes annehmen kann, so muss es eine Summe von gleichen Summanden sein. Welches können nun die Summanden sein? Wenn wir von vorn anfangen, so der Reihe nach entweder 2 oder 3 oder 4 . . . . oder $r < p$. Diese Möglichkeiten wollen wir der Reihe nach durchsprechen.

Die Addition mit 2 als Summanden geschieht äusserlich dadurch, dass wir, vom Punkt A ausgehend, in gleichen Sprüngen durch Ueberschlagung von je einem Punkt die vorliegende Punktenreihe durchlaufen. Dabei ist es ebenso leicht möglich, dass wir auf den Punkt p stossen, als dass wir ihn liegen lassen; d. h. wenn wir bei der Zerlegung von p in zwei ganzzahlige Faktoren auf den Multiplikand 2 rechnen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zerlegung vorgenommen werden kann, ebenso gross, wie das Gegenteil. Ist der Multiplikand 3, so werden bei der Addition stets 2 Punkte überschlagen, und die Wahrscheinlichkeit, dass p sich nicht als Produkt mit dem Multiplikanden 3 herausstellt, ist grösser als das Gegenteil. Durch Fortsetzung derselben mit den Multiplikanden 4, 5, 6 . . . ergiebt sich immer mehr, dass die Zerlegung von p in ein Produkt von 2 Faktoren um so unwahrscheinlicher wird, je grösser der Multiplikand ist. Ganz sicher aber folgt, dass nicht jede Zahl sich in die Form eines Produktes mit einem vorgeschriebenen Faktor bringen lässt.

§. 9.

Division.

Vorbetrachtung. Wenn man zwei Gruppen derselben Einheit hat, so kann man die Anzahl der Einheiten so mit einander vergleichen, dass man sagt: Wie oft lassen sich aus der einen Gruppe solche Gruppen wie die zweite abtrennen? oder mit anderen Worten, indem man die kleinere Gruppe wie eine neue Einheit behandelt, wie viel mal ist die eine Gruppe grösser als die andere? Diese Frage ist die Veranlassung zur Division.

Definition. Eine Zahl a durch eine andere b dividieren, heisst eine dritte Zahl c finden, welche mit b multipliciert a giebt. a ist der Dividend, b der Divisor und c der Quotient. Die symbolische Schreibweise für die gegenseitige Stellung der Zahlen zu einander bei der Operation des Dividierens ist

$$\text{entweder } \frac{a}{b} = c \text{ oder } a : b = c.$$

Discussion über die Möglichkeit des Dividierens. Gemäss der Definition soll c so beschaffen sein, dass c . b = a. d. h. nach den Resul-

taten der Untersuchungen über Multiplikation, a soll in ein Produkt zerlegt werden, dessen einer Faktor b ist. Wir wissen, dass dies nicht immer möglich, und dass das Verlangen um so schwieriger zu erfüllen ist, je grösser b. Daher sind wir hier vor die Alternative gestellt, entweder die oben gegebene Definition der Division einzuschränken, oder bei strikter Innehaltung des Wortlautes der Definition uns nach neuen Zahlen umzuschauen, welche mit b multipliciert a geben. Als solche neue Zahlen führen wir die Form $\frac{a}{b}$ selbst ein und wollen nun überlegen, welche Vorstellungen wir mit ihr zu verknüpfen haben.

Wir wissen von der Grösse $\frac{a}{b}$, dass sie, b mal als Summand gesetzt, a Einheiten liefert. Daraus schliessen wir, dass $\frac{1}{b}$ nicht a Einheiten besitzt. Einen anderen, als einen negativen Schluss können wir nicht ziehen. Wir betrachten daher erst die specielle Grösse $\frac{1}{b}$. Sie hat, da sie b mal als Summand gesetzt, eine Einheit hervorbringt, nicht eine ganze Einheit, sondern nur das, was wir den b^{ten} Teil einer solchen nennen, nnd daraus folgern wir für $\frac{a}{b}$, dass wir mit $\frac{a}{b}$ entweder die Vorstellung von a mal dem b^{ten} Teil einer Einheit oder von dem b^{ten} Teil von a Einheiten verbinden müssen, d. i. in Zeichen

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a.$$

Während wir nicht jede Zahl in die Form eines Produktes bringen können, ist es möglich, jede Zahl als Resultat einer Division anzusehen. Wir brauchen nur die betreffende Zahl, der wir die Form eines Quotienten geben wollen, mit einer beliebigen ganzen Zahl zu multiplicieren und das Produkt durch den Multiplikator zu dividieren.

$$r = \frac{(r \cdot m)}{m}.$$

§. 10.

Bei einer Vergleichung zwischen den 4 Species mit bestimmten und denen mit unbestimmten ganzen Zahlen ergiebt sich als auffälligster Unterschied, dass wir dort nach Ueberwindung der Anfangsschwierigkeiten in ganz formaler Weise die Rechenoperationen ausführten, ohne stets an die Definitionen zu denken, während wir hier ein ordentliches Ausführen der Rechnungsarten nicht vornehmen können. An die Stelle der Ausführung tritt das ausgeführt Denken, welches äusserlich durch die Klammern kenntlich gemacht wird. Unerlässlich ist es hierbei, sich immer die Definitionen der durch die Rechenzeichen angedeuteten Operationen zu vergegenwärtigen. Auf den ersten Blick könnte diese Folge der Einführung der unbestimmten Zahlen als sehr ungünstig erscheinen, indes werden wir anderer Meinung, wenn wir uns des Zweckes erinnern, zu dem wir die allgemeinen Zahlen geschaffen haben.

Die allgemeinen Zahlen sollten uns zur Wahrung der Form in den Aggregaten dienen, damit wir in den letzteren treue Abbilder von Vorgängen in der Erscheinungswelt hätten. Die Form eines Aggregates wird aber bestimmt durch die in ihm vorkommenden Rechenzeichen, verwischt wird sie durch Ausführung der Rechenoperationen. Folglich ist klar, dass die Nichtausführbarkeit der Rechenoperationen mit allgemeinen Zahlen uns vor Entstellung eines analytischen Bildes bewahrt. Mit diesem Vorteil sind freilich auch grosse Verpflichtungeu verbunden.

§. 11.

Unsere Betrachtungen ermöglichen es uns, ein Urteil zu fällen über Resultate von Aggregaten, in denen allgemeine Zahlen a, b . . . . vorkommen. Dadurch aber, dass wir bei den unbestimmten Zahlen die Rechenoperationen ausgeführt denken müssen, sind noch neue Zahlen entstanden, welche die Formen haben

$$(a + b + c + \ldots), \; (-c), \; (m - s), \; (+c), \; 0, \; (a \cdot m), \; \frac{a}{b}.$$

Für den Fall, dass auch sie in die Rechnung eingehen, haben wir zu untersuchen, wie mit ihnen zu rechnen ist, und das wird entschieden sein, sobald wir gezeigt haben, in welcher Weise die Rechnung mit den neuen Zahlformen auf die uns bekannten zurückgeführt wird. Ehe wir jedoch den diesbezüglichen Fragen näher treten, wollen wir uns Rechenschaft geben, in welchen Rechenoperationen die genannten neuen Zahlformen überhaupt vorkommen können und dazu wird gefragt: Genügen Zahlen von der Form

$$(a + b + c \ldots), \; (-c), \; (m - s), \; (+c), \; 0, \; (a \cdot m), \; \frac{a}{b}$$

den Bedingungen, welche man an Zahlen stellt, wenn aus ihnen neue Zahlen gebildet werden
1) nach der Regel der Addition,
2) nach der Regel der Subtraktion,
3) nach der Regel der Multiplikation,
4) nach der Regel der Division?

§. 12.

$(a + b + c \ldots.)$ würde, wenn die Addition ausgeführt werden könnte, eine ganze Zahl ergeben; wir haben uns daher auch $(a + b + c \ldots)$ als eine ganze Zahl von der Beschaffenheit wie a, b . . . zu denken und folglich ist $(a + b + c \ldots)$ additionsfähig.

$(-c)$ ist nach der Definition eine solche Zahl, welche zu einer Zahl wie a addiert, eine um c Einheiten kleinere liefert. Danach ist die Fähigkeit der Addition der Boden, auf dem $(-c)$ erwachsen.

$(m - s)$ ist, wenn $m > s$, eine Zahl wie a, wenn $m < s$, eine Zahl wie $(-c)$, also stets additionsfähig.

$(+c)$ war nur durch das Auftreten des $(-c)$ formell gefordert und ist seinem Wesen nach dasselbe, wie c.

Mit 0 verhält es sich ungefähr so, wie mit $(-c)$.

Für (a . m) gelten die Betrachtungen über (a + b + c . . . .), nachdem an seine Stelle $(a + a + a \ldots + a^{m\,mal})$ gesetzt ist.

$\frac{a}{b}$ ist nach der Definition der Addition nicht als Summand zu gebrauchen, da es im allgemeinen keine ganzen Einheiten repräsentiert. Wir müssen deshalb, soll $\frac{a}{b}$ additionsfähig werden, unsere zu eng gefasste Definition erweitern und sagen:

Mehrere Zahlen addieren, heisst eine neue Zahl finden, welche entweder so viel Einheiten oder so viel Bruchteile einer Einheit hat, wie alle zusammen.

Der wievielte Teil der Einheit genommen werden soll, bestimmt der Divisor der unter dem Summanden befindlichen Zahl $\frac{a}{b}$. Wir drücken dasselbe blos mit anderen Worten aus, wenn wir sagen: Sobald unter den Summanden eine Zahl von der Form $\frac{a}{b}$ ist, legen wir eine b mal kleinere Einheit zu grunde, als wir thun würden, wenn nur ganze Zahlen zu summieren wären.

Wir nannten die jetzt gegebene Definition eine Erweiterung der ersten. Daher ist noch zu zeigen, dass die erste in der zweiten nach den bestehenden Regeln enthalten ist.

Es ist

$$a = \left(\frac{a \cdot m}{m}\right),\ b = \left(\frac{b \cdot m}{m}\right),\ c = \left(\frac{c \cdot m}{m}\right)$$

$$a + b + c = \frac{(a \cdot m + b \cdot m + c \cdot m)}{m}, \text{ nach der erweiterten Definition.}$$

a . m, b . m und c . m sind Rechtecke mit m horizontalen Seiten, in deren jeder resp. a, b, c Einheiten stehen. Durch Aneinanderschieben entsteht ein Rechteck mit m horizontalen Reihen, in deren jeder (a + b + c) Einheiten sind, d. h. a . m + b . m + c. m = (a + b + c) . m. Folglich

$$a + b + c = \left(\frac{(a + b + c) \cdot m}{m}\right) = a + b + c.$$

§. 13.

Die Subtraktion ist eine Rechenoperation, welche durch die Addition definiert wird; folglich können alle Zahlgrössen, die additionsfähig sind, auch bei der Subtraction verwendet werden.

§. 14.

Die Multiplication ist eine specielle Addition, und so müssen wir auch bei den jetzigen Fragen über die erstere Notiz nehmen von der Verallgemeinerung der Definition der letzteren. Der Schwerpunkt der Erweiterung liegt nun darin, dass bei der Addition, sobald ein Summand eine Grösse $\frac{a}{b}$ ist, nicht auf die Einheit, sondern auf die Bruchteile derselben zurückgegangen wird. Als Summand ist bei der Multiplikation der Multiplikand zu betrachten

Daher wird uns, so lange der Multiplikator eine ganze Zahl ist, keine Schwie rigkeit in der Auffassung der Multiplikation entstehen. Anders könnte es sein, wenn an Stelle des Multiplikators eine der neuen Zahlen tritt. Deshalb soll dieser Fall näher besprochen werden.

$(a + b + c \ldots .)$ ist als Multiplikator zu denken, indem wir uns die Einheitsrechtecke nicht neben, sondern unter einander vorstellen.

$(- c)$ lässt sich durch die Anschauung nicht als Multiplikator rechtfertigen.

$(m - s)$ für $m > s$ kann als Multiplikator veranschaulicht werden, nicht aber für $m < s$.

$(+ c)$ ist als Multiplikator denkbar, da es seinem Wesen nach dasselbe wie c ist.

0 ist eine inhaltsleere Grösse, daher kann die Anschauung die Stellung derselben als Multiplikator nicht erklären.

Grössen von der Form $(f \cdot g)$ sind als Multiplikatoren zu veranschaulichen.

In demselben Sinne, der dem Multiplikator bei seiner Einführung zugeteilt wurde, kann eine Zahl von der Form $\frac{a}{b}$ nicht gebraucht werden. Wollen wir aber $\frac{a}{b}$ doch als Multiplikator zulassen, so muss die Definition der Multiplikation passend erweitert werden. Mit Anschluss an die Erweiterung der Definition der Addition sagen wir hier:

Eine Zahl mit einer anderen multiplicieren, heisst entweder die erstere so oft als Summand setzen, als die zweite angiebt, oder den durch den Divisor der zweiten Zahl bestimmten Teil der ersten so oft als Summand setzen, als der Dividend angiebt. Für den zweiten Teil ist die analytische Ausdrucksweise

$$m \cdot \frac{a}{b} = \frac{m}{b} \cdot a.$$

Wenn der zweite Teil der nunmehrigen Definition wirklich eine Erweiterung des ersten ist, so muss sich zeigen lassen, dass der erste Teil in ihm enthalten ist.

Wir dürfen setzen $g = \frac{(g \cdot n)}{n}$ und wollen sehen, ob wir, wenn wir mit $\frac{(g \cdot n)}{n}$ als Multiplicator operieren, zu demselben Resultat gelangen, als ob wir mit g gerechnet hätten.

$$f \cdot \frac{(g \cdot n)}{n} = \frac{f}{n} \cdot (g \cdot n), \text{ nach dem zweiten Teil der Definition,}$$

$$= \frac{f}{n} \cdot (n \cdot g)$$

$$= \underbrace{\frac{f}{n} + \frac{f}{n} + \frac{f}{n} + \ldots + \frac{f}{n}}_{n \text{ mal}}$$

$$\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$$\underbrace{}_{g \text{ mal}} + \frac{f}{n} + \frac{f}{n} + \frac{f}{n} + \ldots + \frac{f}{n}$$

$$= \left(\frac{f}{n} \cdot n\right) + \left(\frac{f}{n} \cdot n\right) + \ldots + \left(\frac{f}{n} \cdot n\right)^{g \text{ mal}}$$
$$= \left(\frac{f \cdot n}{n}\right) \cdot g$$
$$= f \cdot g.$$

§. 15.

In der Division wird der Dividend als das Resultat einer Multiplikation definiert, in welcher der Quotient Multiplikand und der Divisor Multiplikator sein soll. Wir werden deshalb alle die Zahlgrössen, welche in der Multiplikation nicht als Multiplikatoren auftreten konnten, in der Division nicht als Divisoren zulassen dürfen.

§. 16.

Nunmehr ist gezeigt, dass alle Zahlgrössen fähig sind, in die Addition und Subtraktion einzugehen, d. h. dass wir in die Lage gebracht werden können, aus einer beliebigen Anzahl von ihnen nach den Regeln der Addition und Subtraktion neue Zahlen bilden zu sollen. Wir müssen daher jetzt nachsehen, wie das geschieht, und das wissen wir, wenn wir mit Hülfe der Definitionen den Weg gefunden haben, vermittels dessen die Rechnung mit den neuen Zahlformen auf die der einfachen ganzen Zahlen zurückgeführt wird.

Ein gleiches Verfahren muss dann mit den Zahlgrössen in Bezug auf Multiplikation und Division stattfinden. Hier bleiben aber die Zahlen, die nach den vorigen Erörterungen nicht als Multiplikatoren oder Divisoren auftreten dürfen, von den Betrachtungen ausgeschlossen, falls sich nicht im Verlaufe der nachsteheuden Untersuchungen ihre Berechtigung oder ihre Deutung als solche ergeben sollte.

Bevor wir aus einer beliebigen Anzahl der gefundenen Zahlformen neue Zahlen bilden, wollen wir versuchen, für zwei Zahlen die Aufgabe zu lösen.

Addition

I. einfacher Zahlen von der Form a

1) zu congruenten Zahlen.

$$a + a + a + \ldots\ldots + a^{q \text{ mal}} = a \cdot q.$$

2) zu Zahlen von derselben Form.

$$b + c + d + \ldots + a = c + b + a \ldots + d = a + d + c \ldots + c = \text{etc.}$$

3) zu Zahlen von der Form $(b + c)$.

$$(b + c) + a = b + c + a.$$

a zu $(b + c)$ addieren, heisst eine neue Zahl suchen, welche so viel Einheiten hat, wie $(b + c)$ und a zusammen; $(b + c)$ aber hat so viel Einheiten als b und c zusammen, folglich deutet $(b + c) + a$ an, dass so viel Einheiten gesucht werden sollen, wie b, c und a zusammen haben. Dasselbe

Addition

I. einfacher Zahlen von der Form a.

wird auch durch die Summe $b + c + a$ verlangt und deshalb besteht die Gleichung

$$(b + c) + a = b + c + a.$$

4) zu Zahlen von der Form $(-c)$.

$$(-c) + a = -(c - a).$$

Nach der Definition soll eine Zahl gesucht werden, welche so viel Einheiten hat, wie $(-c)$ und a zusammen. Wir wissen, dass die Einheiten des $(-c)$, zu denen von a gebracht, c der letzteren vernichten, wenn $a > c$; ist $a = c$, so werden alle a Einheiten weggenommen, und falls $a < c$, so erhalten wir nach der erweiterten Definition der Subtraktion eine negative Grösse $\Big(-(c - a)\Big)$. Aus allem folgern wir, unter Zugrundelegung eines Reciprocitätsprincips zwischen dem Verhalten der zwei Gattungen von Einheiten zu einander, dass die Einheiten des a, zu denen des $(-c)$ zugefügt, a der letzteren vernichten, d. i.:

$$(-c) + a = \Big(-(c - a)\Big).$$

Ist $a > c$, so gilt das pag. 8 Bemerkte über $-(-)$.

4) zu Zahlen von der Form $(b - c)$.

$$(b - c) + a = (b + a) - c = b + a - c = b - c + a.$$

Zunächst bemerken wir, dass nach den Festsetzungen über die Reihenfolge der Rechenoperationen $(b - c) + a$ gleichwertig ist mit $b - c + a$. Andere Formen erhalten wir durch Zurückgreifen auf die Definition der Addition. $(b - c)$ hat c Einheiten weniger als b. Folglich will die Verbindung $(b - c) + a$ eine Zahl gesucht wissen, welche c Einheiten weniger hat, als a und b zusammen. Das will auch $(b + a) - c$, daher

$$(b - c) + a = (b + a) - c = b + a - c = b - c + a.$$

Die Gleichung $b + a - c = b - c + a$ sagt uns, dass wir in einem Aggregat von 3 Gliedern, unbeschadet des Resultates, die Reihenfolge der Glieder verändern dürfen, wenn wir nur jedem Glied sein Vorzeichen lassen.

Die vorstehenden Gleichungen sind unter der stillschweigenden Voraussetzung abgeleitet, dass $b > c$. Ist hingegen $b < c$, so hat $(b - c)$ eine ganz andere Art von Einheiten als a, nämlich solche wie $(-d)$. Um das deutlicher hervortreten zu lassen, setzen wir für $(b - c)$ $\Big(-(c - b)\Big)$. Dann ist

$$(b - c) + a = \Big(-(c - b)\Big) + a = \Big(-(c - b - a)\Big) \text{ nach Addition } I_4.$$

Unangenehm ist für uns, dass je nach dem Grössenverhältnis von b und c zu einander der Ausdruck $(b - c) + a$ verschiedene Form annimmt. Wir wollen deshalb versuchen, ob wir, falls wir aus Unkenntnis der Grössenverhältnisse einmal eine unrichtige Form angewendet, durch die betreffenden

Addition

I. einfacher Zahlen von der Form a

Formen selbst auf unser Versehen aufmerksam gemacht werden. In diesem Sinne nehmen wir an, dass $b > c$ und dass wir doch gesetzt hätten

$$(b - c) + a = \Big(-(c - b - a)\Big),$$

dann würde $(b - c) + a$ ein positives Resultat ergeben; der Ausdruck in der Klammer aber würde negativ werden und das Ganze würde nochmals negativ genommen sein Darüber sind wir aber schon dahin aufgeklärt, dass das als positiv gelten soll. Also werden wir durch die Rechnung unter den bisherigen Festsetzungen von selbst richtig geführt.

Formell betrachtet, geht nun $\Big(-(c - b - a)\Big)$ in $a + b - c$ über, wenn wir nach der erlaubten Vertauschung der Plätze der Glieder die Klammern weglassen und zugleich eine Umkehrung sämtlicher Zeichen vornehmen. Daraus schliessen wir, dass wir, wenn vor einer Klammer ein „—“ steht, wir, unbeschadet des Resultates, die Klammer fortlassen dürfen, sofern wir jedes Zeichen in sein entgegengesetztes verwandeln. Dasselbe gilt von dem Einschliessen in Klammern, wenn das erste Glied ein „—“ hat. (Auflösen und Setzen der Klammern.)

6) zu Zahlen von der Form $(+ c)$.

$$(+ c) + a = \Big(+(c + a)\Big).$$

Die durch $(+ c)$ dargestellten Einheiten sind von derselben Natur und derselben Menge wie die durch c repräsentierten, daher

$$(+ c) + a = c + a = \Big(+(c + a)\Big).$$

7) zu 0.

$$0 + a = a.$$

0 zeigt das Fehlen jeglicher Einheiten an. Dasselbe wird auch durch Auflassen des Platzes angemerkt, folglich

$$0 + a = (+ a) = a.$$

8) zu Zahlen von der Form $(f \,.\, g)$.

$$(f \,.\, g) + a = f \,.\, g + a.$$

Diese Beziehung folgt aus der Festsetzung über die Reihenfolge der Rechenoperationen.

9) zu Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$\frac{m}{n} + a = \frac{m + a \,.\, n}{n}.$$

Nach der erweiterten Definition der Addition will $\frac{m}{n} + a$ so viel Bruchteile der Einheit gefunden wissen, wie $\frac{m}{n}$ und a zusammen haben, das sind $\frac{m + a \,.\, n}{n}$; folglich

$$\frac{m}{n} + a = \frac{m + a \,.\, n}{n}.$$

Addition

I. der Zahlen von der Form a

Dass wir m + a . n nicht in Klammern setzen, obgleich die Rechenoperationen ausgeführt zu denken sind, hat den Grund in der Form des Bruchstriches, die es ermöglicht, den Strich so weit zu ziehen, wie die Rechenoperationen ausgeführt zu denken sind. Indem wir so dem Bruchstrich zu seiner ursprünglichen Bedeutung noch die der Klammer beilegen, vermeiden wir eine zu grosse Häufung der Klammern. Freilich werden wir noch öfter zu beweisen haben, dass durch die Doppelfunktion des Bruchstrichs kein Widerspruch mit früheren Regeln herbeigeführt wird.

II. der Zahlen von der Form (a + b)

1) zu einfachen Zahlen c.

$$c + (a + b) = c + a + b. \quad \text{Analog Addition } I_3.$$

2) zu Zahlen von derselben Form.

$$(c + d) + (a + b) = c + d + a + b. \quad \text{Analog Addition } I_3.$$

3) zu congruenten Zahlen.

$$(a + b) + (a + b) + \ldots + (a + b)^{q \text{ mal}} = (a + b) \,.\, q.$$

$$\begin{aligned} (a+b) + (a+b) + \ldots + (a+b) &= a + b + a + b + \ldots + a + b. \quad \text{Add. } II_2. \\ &= a + a + \ldots + a^{q \text{ mal}} + b + \ldots + b^{q \text{ mal}} \\ &= a \,.\, q + b \,.\, q \end{aligned}$$

$$(a + b) \,.\, q = a \,.\, q + b \,.\, q.$$

4) zu Zahlen von der Form (— c).

$$(-c) + (a + b) = \Big(-(c - a - b)\Big) = a + b - c.$$

Die Einheiten des (a + b) stehen in demselben Verhältnis zu denen des (— c), wie die von a. Daher

$$(-c) + (a + b) = \Bigg(-\Big(c - (a + b)\Big)\Bigg).$$

Die Einheiten c werden nun aber auch um (a + b) verringert, wenn wir erst a und dann b subtrahieren; also

$$\begin{aligned} \Bigg(-\Big(c - (a + b)\Big)\Bigg) &= \Big(-(c - a - b)\Big) \\ &= -c + a + b \\ &= a + b - c. \qquad \text{Addition } I_5. \end{aligned}$$

5) zu Zahlen von der Form (c — d)-

$$(c - d) + (a + b) = c - d + a + b = c + a - d + b \text{ etc.}$$

Durch dieselben Betrachtungen, die unter Addition I_5 angestellt worden sind, finden wir, dass

Addition
II. der Zahlen von der Form (a + b)

$$(c - d) + (a + b) = (c + a + b) - d$$
$$= c + a + b - d.$$

Aber auch
$$(c - d) + (a + b) = c - d + a + b$$

$$c - d + a + b = c + a + b - d,$$

d. h. in einem Aggregat von 4 Gliedern ist das Resultat unabhängig von der Ordnung der Glieder, wenn nur jedes Glied sein Vorzeichen behält.

Gleicherweise ergiebt sich die Regel über das Auflösen und Setzen der Klammern, wenn ein „minus" von ihnen steht.

6) zu Zahlen von der Form (+ c).

$$(+ c) + (a + b) = c + a + b = \Big(+ (c + a + b)\Big).$$ Analog Addition I_6.

7) zu 0. $$0 + (a + b) = (a + b).$$ Addition I_7.

8) zu Zahlen von der Form (f . g).

$$(f . g) + (a + b) = f . g + a + b.$$ Addition I_8.

9) zu Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$\frac{m}{n} + (a + b) = \frac{m + a . n + b . n}{n}.$$

$$\frac{m}{n} + (a + b) = \frac{m + (a + b) n}{n}.$$ Addition I_9.

$$= \frac{m + an + bn}{n}.$$ Addition II_3.

III. der Zahlen von der Form (— a)

1) zu einfachen Zahlen b.

$$b + (- a) = b - a.$$

Diese Gleichung folgt aus der Definition der negativen Zahlen.

2) zu einfachen Zahlen a.

$$a + (- a) = 0.$$

Denn $a + (- a) = a - a = 0.$

3) zu Zahlen von derselben Form.

$$(- b) + (- a) = \Big(- (b + a)\Big).$$

(— b) und (— a) haben dieselbe Art Einheiten, (— b) hat deren b, (— a) hingegen a, folglich muss die Summe (— b) + (— a) (b + a) solcher Einheiten umfassen; d. i. symbolisch $\Big(- (b + a)\Big)$, also

$$(- b) + (- a) = \Big(- (b + a)\Big).$$

Addition

III. der Zahlen von der Form (— a)

4) zu congruenten Zahlen

$(-a) + (-a) + \ldots + (-a)^{q\,\text{mal}} = (-a) \cdot q.$

$(-a) + (-a) + \ldots + (-a)^{q\,\text{mal}} = -(a + a + \ldots + a^{q\,\text{mal}}),$ Add. III_3.

$= \left(-(a \cdot q)\right)$

$$(-a) \cdot q = \left(-(a \cdot q)\right).$$

5) zu Zahlen von der Form (b + c).

$(b + c) + (-a) = b + c - a.$ Analog Addition III_1

6) zu Zahlen von der Form (b — c).

$$(b - c) + (-a) = b - c - a.$$

b > c. Wenn b > c, so hat (b — c) Einheiten wie die Zahl b, folglich

$$(b - c) + (-a) = b - c - a.$$

b < c. Wenn b < c, so setzen wir $(b - c) = -(c - b)$, dann ist nach Addition III_3

$$-(c - b) + (-a) = \left(-(c - b + a)\right).$$

Mit Benutzung der Regel über Klammerauflösen geht der Ausdruck $\left(-(c - b + a)\right)$ genau in den linken $b - c - a$ über und wir brauchen daher in der Zahl von der Form (b — c) bei ihrer Addition mit (— a) nicht das Grössenverhältnis von b und c zu beachten.

7) zu Zahlen von der Form (+ b).

$$(+b) + (-a) = \left(+(b - a)\right).$$

8) zu 0.

$$0 + (-a) = (-a).$$

9) zu Zahlen von der Form (f . g).

$$(f \cdot g) + (-a) = f \cdot g - a.$$

10) zu Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$\frac{m}{n} + (-a) = \frac{m - a \cdot n}{n}.$$

Nach den bestehenden Festsetzungen über das Wesen der Addition müssen wir schliessen, dass (— a) zu $\frac{m}{n}$ addiert, $\frac{m}{n}$ um so viel Bruchteile der Einheit vermindert, als a umfasst, d. i.

$$\frac{m}{n} + (-a) = \frac{m}{n} - \frac{a \cdot n}{n} = \frac{m - a \cdot n}{n}.$$

Addition

IV. der Zahlen von der Form $(a - b)$

1) zu einfachen Zahlen c.

$$c + (a - b) = c + a - b.$$

$a > b$. Analog Addition I_5 ist

$$c + (a - b) = (c + a) - b$$
$$= c + a - b.$$

$a < b$.

$$c + (a - b) = c + \big(-(b - a)\big)$$
$$= c - (b - a)$$
$$= c - b + a.$$

Folglich ist das Grössenverhältnis zwischen a und b ohne Einfluss auf die Form des Aggregates.

2) zu Zahlen von der Form $(c + d)$.

$$(c + d) + (a - b) = c + d + a - b.$$

3) zu Zahlen von der Form $(- c)$.

$$(- c) + (a - b) = -(c - a + b).$$

$a > b$. Mit Rücksicht auf Addition I_4 ist

$$(- c) + (a - b)$$
$$= \Big(-\big(c - (a - b)\big)\Big)$$
$$= \big(-(c - a + b)\big).$$

$a < b$. Mit Rücksicht auf Addition III_3

$$(- c) + \big(-(b - a)\big)$$
$$= \Big(-\big(c + (b - a)\big)\Big)$$
$$= \big(-(c + b - a)\big).$$

Die beiden äquivalenten, unter verschiedenen Voraussetzungen gefundenen Formen zeigen, dass das Grössenverhältnis von a und b zu einander in der Form $(a - b)$ nicht wesentlich ist.

4) zu Zahlen von derselben Form $(c - d)$.

Hier sind 4 Fälle zu unterscheiden, je nachdem

$c > d$ und $a > b$, oder $c > d$ und $a < b$, oder
$c < d$ und $a > b$, oder $c < d$ und $a < b$.

Für den ersten Fall lässt sich leicht zeigen, dass nach der Definition der Addition die Gleichungen bestehen

$$(c - d) + (a - b) = (c + a) - (d + b) = c + a - d - b = c - d + a - b.$$

Dieselben Formen folgen unter Benutzung der bis jetzt gefundenen Beziehungen auch für die übrigen 3 Fälle. Folglich brauchen wir in Summen auf die Grössenverhältnisse der Glieder von Zahlen der Form $(a - b)$ keine Rücksicht zu nehmen.

5) zu congruenten Zahlen.

$a > b$.

$$(a-b) + (a-b) + \ldots + (a-b)^{q \text{ mal}}$$
$$= (a - b) \,.\, q.$$

$a < b$.

$$\big(-(b-a)\big) + \ldots + \big(-(b-a)\big)^{q \text{ mal}}$$

Addition

IV. der Zahlen von der Form (a — b)

Andrerseits ist nach Addition IV_4

$$(a - b) + \ldots + (a - b)^{q \text{ mal}}$$
$$= (a + \ldots + a^{q \text{ mal}}) - (b + \ldots + b^{q \text{ mal}})$$
$$= a \cdot q - b \cdot q$$

$$(a - b) \cdot q = aq - bq$$

$$= \left(-(b - a)\right) \cdot q$$
$$= \left(-(b - a) \cdot q\right) \quad \text{Addition } III_4.$$
$$\left(-(b-a)\right) + \ldots + \left(-(b-a)\right)^{q \text{ mal}}$$
$$= (a-b) + \ldots + (a-b)^{q \text{ mal}} \quad \text{Add. } IV_4$$

$$\left(-(b - a)\right) \cdot q = a \cdot q - b \cdot q$$

$$(a - b) \cdot q = \left(-(b - a)\right) \cdot q.$$

6) zu Zahlen von der Form (+ c).

$$(+ c) + (a - b) = \left(+ (c + a - b)\right).$$

7) zu 0.

$$0 + (a - b) = (a - b).$$

8) zu Zahlen von der Form (f . g).

$$(f \cdot g) + (a - b) = f \cdot g + a - b.$$

9) zu Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$\frac{m}{n} + (a - b) = \frac{m + an - bn}{n}.$$

V. der Zahlen von der Form (+ a)

1) zu einfachen Zahlen b.

$$b + (+ a) = b + a = + (b + a).$$

2) zu Zahlen von der Form (b + c).

$$(b + c) + (+ a) = b + c + a = + (b + c + a).$$

3) zu Zahlen von der Form (— b).

$$(- b) + (+ a) = (- b) + a = \left(- (b - a)\right).$$

4) zu Zahlen von der Form (b — c).

$$(b - c) + (+ a) = b - c + a = + (a + b - c).$$

5) zu Zahlen von derselben Form.

$$(+ b) + (+ a) = \left(+ (b + a)\right).$$

Addition

V. der Zahlen von der Form (+ a)

6) zu congruenten Zahlen.

$$(+a) + (+a) + \ldots + (+a)^{q\,\text{mal}} = (+a) \cdot q$$

$$(+a) + (+a) + \ldots + (+a)^{q\,\text{mal}} = \Big(+ (a + a + \ldots + a^{q\,\text{mal}})\Big)$$

$$= \Big(+ (a \cdot q)\Big).$$

$$(+a) \cdot q = \Big(+ (a \cdot q)\Big).$$

7) zu Zahlen von der Form (f . g).

$$(f \cdot g) + (+a) = \Big(+ (f \cdot g + a)\Big).$$

8) zu Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$\frac{m}{n} + (+a) = +\frac{m + a \cdot n}{n}.$$

VI. der Zahl 0

1) zu einfachen Zahlen.

$$a + 0 = a. \quad \text{Analog Addition } I_7.$$

2) zu Zahlen von der Form (a + b).

$$(a + b) + 0 = (a + b).$$

3) zu Zahlen von der Form (— a).

$$(-a) + 0 = (-a).$$

4) zu Zahlen von der Form (a — b).

$$(a - b) + 0 = (a - b).$$

5) zu Zahlen von der Form (+ a).

$$(+a) + 0 = (+a).$$

6) zu congruenten Zahlen.

$$0 + 0 + \ldots + 0^{q\,\text{mal}} = 0 \cdot q$$

$$0 + 0 + \ldots + 0 = 0$$

$$0 \cdot q = 0.$$

7) zu Zahlen von der Form (f . g).

$$(f \cdot g) + 0 = (f \cdot g).$$

8) zu Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$\frac{m}{n} + 0 = \frac{m}{n}.$$

Addition

VI. der Zahl 0

0 zeigte uns bis jetzt das Fehlen jedweder Einheit als Ganzes an, da wir auf 0 bei der Subtraktion der einfachen ganzen Zahlen gekommen waren. Nach der nunmehr statt gefundenen Erweiterung der Rechenoperationen fügen wir hinzu, dass 0 auch das Fehlen jedes Bruchteiles der Einheit bedeutet. Wir sind hierzu berechtigt, da das Fehlen jeder Einheit als Ganzes das Fehlen jedes Bruchteiles als Specialfall einschliesst.

VII. der Zahlen von der Form (a . b)

1) zu einfachen Zahlen.

$$c + (a \,.\, b) = c + a \,.\, b.$$

2) zu Zahlen von der Form (c + d).

$$(c + d) + (a \,.\, b) = c + d + a \,.\, b.$$

3) zu Zahlen von der Form (— c).

$$(-c) + (a \,.\, b) = \Big(-(c - a \,.\, b)\Big).$$

4) zu Zahlen von der Form (c — d).

$$(c - d) + (a \,.\, b) = c - d + a \,.\, b.$$

5) zu Zahlen von der Form (+ c).

$$(+c) + (a \,.\, b) = \Big(+(c + a \,.\, b)\Big).$$

6) zu 0.

$$0 + (a \,.\, b) = (a \,.\, b).$$

7) zu Zahlen von derselben Form.

$$(c \,.\, d) + (a \,.\, b) = c \,.\, d + a \,.\, b.$$

8) zu Zahlen von derselben Form mit einem gemeinsamen Faktor (c . b).

$$(c \,.\, b) + (a \,.\, b) = c \,.\, b + a \,.\, b = (c + a) \,.\, b.$$

9) zu congruenten Zahlen.

$$(ab) + (ab) + \ldots + (ab)^{q\,\text{mal}} = (a \,.\, b) \,.\, q$$

$$(a \,.\, b) + (a \,.\, b) + \ldots + (a \,.\, b)^{q\,\text{mal}} = (a + a + \ldots + a^{q\,\text{mal}}) \,.\, b$$
$$= (a \,.\, q) \,.\, b.$$

Nach Vertauschung der Faktoren ist ferner

$$(a \,.\, b) + (a \,.\, b) + \ldots + (a \,.\, b)^{q\,\text{mal}} = (b \,.\, a) + (b \,.\, a) + \ldots + (b \,.\, a)^{q\,\text{mal}}$$
$$= (b + b + \ldots + b^{q\,\text{mal}}) \,.\, a$$
$$= (b \,.\, q) \,.\, a$$

$$(a \,.\, b) \,.\, q = (b \,.\, a) \,.\, q = (a \,.\, q) \,.\, b = (q \,.\, a) \,.\, b = (b \,.\, q) \,.\, a = (q \,.\, b) \,.\, a.$$

Das Bestehen dieser sechs Gleichungen berechtigt uns, in den sämtlichen Ausdrücken die Klammern wegzulassen und den Satz auszusprechen: In einem Produkt von 3 Faktoren ist die Stellung der Faktoren auf das Resultat ohne Einfluss.

Addition

VII. der Zahlen von der Form (a . b)

10) zu Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$\frac{m}{n} + (a \,.\, b) = \frac{m + a \,.\, b \,.\, n}{n}.$$

VIII. der Zahlen von der Form $\frac{a}{b}$

1) zu einfachen Zahlen.

$$c + \frac{a}{b} = \frac{c \,.\, b + a}{b}.$$

2) zu Zahlen von der Form (c + d).

$$(c + d) + \frac{a}{b} = \frac{c \,.\, b + d \,.\, b + a}{b}.$$

3) zu Zahlen von der Form (— c).

$$(- c) + \frac{a}{b} = \left(- \frac{c \,.\, b}{b}\right) + \frac{a}{b} = \left(- \frac{c \,.\, b - a}{b}\right).$$

4) zu Zahlen von der Form (c — d).

$$(c - d) + \frac{a}{b} = \left(\frac{c \,.\, b - d \,.\, b + a}{b}\right).$$

5) zu Zahlen von der Form (+ c).

$$(+ c) + \frac{a}{b} = \left(+ \frac{c \,.\, b + a}{b}\right).$$

6) zu 0.

$$0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

7) zu Zahlen von der Form (c . d).

$$(c \,.\, d) + \frac{a}{b} = \frac{c \,.\, d \,.\, b + a}{b}.$$

8) zu Zahlen von derselben Form und demselben Divisor.

$$\frac{c}{b} + \frac{a}{b} = \frac{c + a}{b}.$$ Nach Definition der Addition.

9) zu congruenten Zahlen.

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots + \frac{a}{b}^{\text{q mal}} = \frac{a}{b} \,.\, q$$

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots + \frac{a}{b}^{\text{q mal}} = \frac{a + a + \ldots + a^{\text{q mal}}}{b}$$

$$= \frac{a \,.\, q}{b}$$

$$\frac{a}{b} \,.\, q = \frac{a \,.\, q}{b}.$$

Addition

VIII. der Zahlen von der Form $\frac{a}{b}$

10) zu Zahlen von derselben Form.

$$\frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{c \cdot b + a \cdot d}{b \cdot d}.$$

$\frac{a}{d}$ zu $\frac{c}{d}$ addieren, heisst eine Grösse finden, welche so viel Bruchteile der Einheit hat, wie $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ zusammen. Als Bruchtheil der Einheit, oder als neue Einheit, die wir der Addition zu Grunde legen, müssen wir, da $\frac{a}{b}$ unter den Summanden ist, den b^{ten} Teil der Einheit nehmen; $\frac{c}{d}$ verlangt den d^{ten} Teil. Um beiden Anforderungen zu genügen, nehmen wir den $(b \cdot d)^{\text{ten}}$ Teil der Einheit als neue Einheit, haben aber zu untersuchen, wie viel solcher Einheiten $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ besitzen. Eine Einheit hat offenbar $(b \cdot d)$ $(b \cdot d)^{\text{te}}$ Teile, also

$$1 = \frac{1}{b \cdot d} \cdot b \cdot d.$$

Der b^{te} Teil einer Einheit wird demnach nur d der in rede stehenden Teile haben, d. i.

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{b \cdot d} \cdot d$$

und folglich

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b \cdot d} \cdot d \cdot a$$

$$= \frac{d \cdot a}{b \cdot d} \text{ nach Addition VIII}_9.$$

Gleichermassen ist $\frac{c}{d}$, durch die kleinere Einheit $\frac{1}{b \cdot d}$ ausgedrückt, gleich $\frac{c \cdot b}{b \cdot d}$, also

$$\frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{c \cdot b}{b \cdot d} + \frac{a \cdot d}{b \cdot d}$$

$$= \frac{c \cdot b + a \cdot d}{b \cdot d}.$$

Subtraction

I. einfacher Zahlen von der Form a

1) von congruenten Zahlen.

$$a - a = 0.$$

2) von Zahlen derselben Form.

$$b - a = -(a - b).$$

3) von Zahlen von der Form (b + c).

$$(b + c) - a = (b + c - a).$$

$(b + c) > a$. Wenn $(b + c) > a$, so wird eine Zahl gesucht, die zu a

$(b + c) < a$. Wenn $(b + c) < a$, so führt die Subtraktion des a von

Subtraction

I. einfacher Zahlen von der Form a

addiert $(b + c)$ giebt, d. i. nach den Regeln der Addition $(b + c - a)$.

$(b + c)$ auf eine negative Zahl $\Big(-(a - (b + c)\Big)$. Mit Beachtung der Regeln über die Klammern ist das $(- a + b + c)$,

d. h. beide Fälle führen auf dieselbe Form.

4) von Zahlen von der Form $(- c)$.

$$(- c) - a = \Big(-(c + a)\Big).$$

Eine Zahl, welche den Anforderungen genügt, die an eine Differenz von $(- c)$ und a gestellt werden, ist $\Big(-(c + a)\Big)$, denn nach Addition I_3 ist

$$a + \Big(-(c + a)\Big) = \Big(a - (c + a)\Big) = (a - c - a) = (- c).$$

In Worten sagt die Gleichung

$$(- c) - a = \Big(-(c + a)\Big)$$

als Ergänzung zu dem Wesen der negativen Zahlen, dass dieselben Zahlen sind, deren Einheiten durch Subtraktion einer gewöhnlichen Zahl von ihnen um so viel Einheiten vermehrt werden, als die gewöhnliche Zahl hat.

5) von Zahlen von der Form $(b - c)$.

$$(b - c) - a = (b - c - a).$$

Um das Bestehen der Gleichung allgemein gültig nachzuweisen, müssen wir folgende Fälle unterscheiden

1) $b > c$ und $a < (b - c)$,
2) $b > c$ und $a > (b - c)$,
3) $b < c$ und $a \gtreqless (c - b)$.

Im Fall 1) ist $(b - c - a)$ eine Grösse wie $(d - e)$ $d > e$; also ist nach Addition IV_1

$$\begin{aligned} a + (b - c - a) &= (a + b - c - a) \\ &= (a - a + b - c) \\ &= (b - c). \end{aligned}$$

Im Fall 2) haben wir in $(b - c - a)$ eine Grösse wie $(- d)$, das ist

$$(b - c) - a = \Big(-\Big(a - (b - c)\Big)\Big).$$

Unter Benutzung der Regeln über die Klammern ist

$$\Big(-\Big(a - (b - c)\Big)\Big) = (- a + b - c),$$

Subtraction

I. einfacher Zahlen von der Form a

d. h. Fall 2) fällt formell mit Fall 1) zusammen. Dass dies durch die controlierende Addition bestätigt wird, sehen wir mit Hülfe Addition III_1. Denn

$$a + \Big(-\big(a - (b - c)\big)\Big) = \Big(a - \big(a - (b - c)\big)\Big)$$
$$= \big(a - a + (b - c)\big)$$
$$= (b - c).$$

Endlich wird sich auch in Fall 3) ergeben, dass derselbe mit Fall 1) formell übereinstimmt. Nach Subtraktion I_4 werden durch Subtraktion des a von einer negativen Zahl die Einheiten der letzteren um a vermehrt, d. h.

$$\big(-(c - b)\big) - a = \big(-(c - b + a)\big)$$
$$= (-c + b - a)$$
$$= (b - c - a).$$

Die formelle Uebereinstimmung der drei überhaupt möglichen, durch die Grössenverhältnisse der Glieder bedingten Fälle berechtigt uns, bei der Subtraktion einer Zahl a von einer anderen $(b - c)$ ohne Rücksicht auf die Grösse der Glieder zu setzen

$$b - c - a.$$

6) von Zahlen von der Form $(+ c)$.

$$(+ c) - a = \big(+ (c - a)\big).$$

$c > a$. Wenn $c > a$, so ergiebt sich die Gleichung durch Zugrundelegung der Definition.

$c < a$. Ist $c < a$, so bekommen wir eine negative Zahl $\big(-(a - c)\big)$. Für diese können wir $\big(+(c - a)\big)$ setzen, wenn wir bestimmen, dass $+ (-) = -$.

7) von 0.

$$0 - a = (- a).$$
$$0 - a = m - m - a = m - (m + a)$$
$$= (- a),$$

denn eine negative Zahl entsteht durch Subtraktion einer grösseren von einer kleineren.

8) von Zahlen von der Form $(f \,.\, g)$.

$$(f \,.\, g) - a = f \,.\, g - a.$$

Subtraction

I. einfacher Zahlen von der Form a

9) von Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$\frac{m}{n} - a = \frac{m - a \cdot n}{n}.$$

$\frac{m}{n} < a$. Wenn $\frac{m}{n} < a$, so ist auch $m < a \cdot n$, und folglich $\frac{m - a \cdot n}{n}$ eine Zahl wie $\frac{b}{c}$. Also

$$a + \frac{m - a \cdot n}{n} = \frac{m}{n}.$$

$\frac{m}{n} < a$. Hier ist $\frac{m}{n} - a$

$$= \left(- \left(a - \frac{m}{n}\right)\right)$$

$$= \left(- \left(\frac{a \cdot n - m}{n}\right)\right).$$

Diese Form geht in die obige über, wenn wir das — zunächst in die innere Klammer und dann in den Zähler bringen, indem wir alle Zeichen umkehren. Ein Bruchstrich hat demnach dieselbe Bedeutung wie eine Klammer.

II. der Zahlen von der Form (a + b)

1) von einfachen Zahlen c.

$$c - (a + b) = c - a - b.$$

Beide Seiten der Gleichung wollen dieselbe Zahl gesucht wissen.

2) von Zahlen von derselben Form.

$$(c + d) - (a + b) = c + d - a - b = (c - a) + (d - b).$$

Mit Beachtung der Reihenfolge der Rechenoperationen ist $(c + d)$ zu Anfang des Aggregates gleichbedeutend mit $c + d$. Folglich $(c + d) - (a + b) = c + d - a - b$ nach Subtraktion II_1. Ausserdem wissen wir nach Addition IV_4, dass $(c + d) - (a + b)$ und $(c - a) + (d - b)$ $(a + b)$ Einheiten weniger haben, als $(c + d)$, folglich $c + d - a - b = c - a + d - b$; d. h.: In einem Aggregat von 4 Gliedern ist die Stellung der Glieder auf das Resultat ohne Einfluss.

3) von congruenten Zahlen.

$$(a + b) - (a + b) = 0.$$

4) von Zahlen von der Form (— c).

$$(- c) - (a + b) = \left(- (c + a + b)\right).$$ Analog Subtraktion I_4.

5) von Zahlen von der Form (c — d).

$$(c - d) - (a + b) = c - d - a - b.$$

Um bei der Behandlung der Differenz $(c - d) - (a + b)$ später auf die Grössenverhältnisse der einfachen Zahlen zu einander keine Rücksicht

Subtraction

II. der Zahlen von der Form $(a + b)$

walten lassen zu müssen, haben wir zu zeigen, dass die obige Gleichung für jedes mögliche Grössenverhältnis zwischen c, d und $(a + b)$ besteht.

1) $c > d$ und $(c - d) > (a + b)$.

$$(c - d) - (a + b) = c - d - a - b.$$

2) $c > d$ und $(c - d) < (a + b)$.

$$(c - d) - (a + b) = -\Big((a+b)-(c-d)\Big) = -(a + b - c + d) = -a - b + c - d.$$

3) $c < d$ und $(d - c) \gtreqless (a + b)$.

$$-(d - c) - (a + b) = -\Big((d-c) + (a+b)\Big) = -(d - c + a + b) = -d + c - a - b.$$

Wir sehen, dass wir in allen drei Fällen unter Benutzung der Regeln über das Auflösen der Klammern und die Vertauschung der Glieder in einem 4gliedrigen Aggregat zu einer und derselben Form gelangen.

6) von Zahlen von der Form $(+ c)$.

$(+ c) - (a + b) = + (c - a - b)$. Analog Subtraktion I_6

7) von 0.

$$0 - (a + b) = \Big(-(a + b)\Big).$$

8) von Zahlen von der Form $(f . g)$.

$$(f . g) - (a + b) = f . g - a - b.$$

9) von Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$\frac{m}{n} - (a + b) = \frac{m - (a + b) . n}{n} = \frac{m - a . n - b . n}{n}.$$

Analog Subtraktion I_9

III. der Zahlen von der Form $(- a)$

1) von einfachen Zahlen b.

$$b - (- a) = b + a.$$

Eine Zahl, zu welcher $(- a)$ addiert b giebt, muss a Einheiten mehr haben als b; dies hat $b + a$.

2) von einfachen Zahlen a.

$$a - (- a) = 2a.$$

3) von Zahlen von derselben Form.

$$(- b) - (- a) = \Big(-(b - a)\Big) = + (a - b).$$

Da $(- b)$ und $(- a)$ Einheiten derselben Art umfassen, so muss die gesuchte Zahl, wenn $a < b$, weniger solcher Einheiten haben, als $(- b)$ und zwar a weniger, d. i.

$$(- b) - (- a) = \Big(-(b - a)\Big) = + (a - b).$$

Subtraction

III. der Zahlen von der Form (— a)

Ist $a > b$, so werden wir mit Wiederholung der schon angestellten Betrachtung über die Erweiterung der Subtraktion gleichartiger Einheiten von einander, wenn der Subtrahend > Minuend, auf eine neue Grösse $\left(-(b-a)\right)$ geführt, wo $b < a$. Das würde eine Grösse sein von der Form $\left(-(-z)\right) = +z$. Dasselbe Resultat erhalten wir, wenn wir in der Differenz $(-b)-(-a)$ die Reihenfolge der Glieder verändern: $-(-a)+(-b) = (a-b)$.

4) von congruenten Zahlen.

$$(-a)-(-a) = \left(-(a-a)\right) = (-0);\ (-a)-(-a) = +(a-a) = (+0)$$

5) von Zahlen von der Form $(b+c)$.

$$(b+c)-(-a) = b+c+a.$$

6) von Zahlen von der Form $(b-c)$.

$$(b-c)-(-a) = b-c+a.$$

$b > c$.

Nach Subtraktion III_1 ist

$$(b-c)-(-a) = b-c+a.$$

$b < c$.

Nach Subtraktion III_3 ist

$$(b-c)-(-a) = -(c-b)-(-a) = \left(-(c-b-a)\right) = -c+b+a.$$

Wir sehen auch hier, dass durch unsere Festsetzungen über die Klammern die Eindeutigkeit der Rechnungsoperationen gewahrt wird.

7) von Zahlen von der Form $(+b)$.

$$(+b)-(-a) = \left(+(b+a)\right).$$

8) von 0.

$$0-(-a) = (+a).$$

9) von Zahlen von der Form $(f.g)$.

$$(f.g)-(-a) = f.g+a.$$

10) von Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$\frac{m}{n}-(-a) = \frac{m+a.n}{n}.$$

IV. der Zahlen von der Form (a — b)

1) von einfachen Zahlen c.

$$c-(a-b) = c-a+b.$$

Subtraction

IV. der Zahlen von der Form $(a - b)$

$a > b$ u. $(a - b) < c$.

$c - (a - b)$ will b Einheiten weniger als a subtrahiert wissen. Deshalb müssen, wenn a subtrahiert sind, b addiert werden, d. i.

$$c - a + b.$$

$a > b$ und $(a - b) > c$.

Nach der erweiterten Definition der Subtraktion ist in diesem Falle $c - (a - b)$

$$= \left| -\left((a - b) - c\right) \right|$$

$$= \left| -(a - b - c) \right|$$

und nach Auflösung der Klammern

$$-a + b + c.$$

$a < b$.

Wenn $a < b$, so ist $(a - b)$ eine Grösse von der Form $(-d)$, also $c - (a - b)$

$$= c - \left(-(b - a)\right)$$

$$= c + (b - a),$$

nach Subtraktion III_1

$$= c + b - a.$$

2) von Zahlen von der Form $(c + d)$.

$$(c + d) - (a - b) = c + d - a + b.$$

3) von Zahlen von der Form $(-c)$.

$$(-c) - (a - b) = \left(-(c + a - b)\right) = -c - a + b.$$

$a > b$.

Mit Bezug auf Subtraktion I_4 ist

$$(-c) - (a - b)$$

$$= \left(-\left(c + (a - b)\right)\right)$$

$$= \left(-(c + a - b)\right)$$

$$= -c - a + b.$$

$a < b$ u. $(b - a) < c$.

$$(-c) - (a - b)$$

$$= (-c) - \left(-(b - a)\right)$$

d. i. nach Subtr. III_3

$$= \left(-\left(c - (b - a)\right)\right)$$

$$= \left(-(c - b + a)\right)$$

$$= -c + b - a.$$

$a < b$ u. $(b - a) > c$.

$$(-c) - (a - b)$$

$$= (-c) - \left(-(b - a)\right)$$

d. i. nach Subtr. III_3

$$= -\left| \left(-(b - a)\right) - (-c) \right|$$

$$= -\left| \left(-(b - a - c)\right) \right|$$

$$= -\left| -(b - a - c) \right|$$

$$= b - a - c.$$

4) von Zahlen von derselben Form $(c - d)$.

$$(c - d) - (a - b) = c - d - a + b.$$

Dieser Fall führt auf Subtraktion IV_1 zurück, wenn wir annehmen, $c > d$. Dann ist für jedes Grössenverhältnis von a und b zu einander

$$(c - d) - (a - b) = c - d - a + b.$$

Auf Subtraktion IV_3 kommen wir, wenn $c < d$. Nach den dortigen Resultaten ist

Subtraction

IV. der Zahlen von der Form (a — b)

$$\left(-(d-c)\right) - (a-b) = -(d-c) - a + b$$
$$= -d + c - a + b$$
$$= c - d - a + b.$$

5) von congruenten Zahlen.

$$(a-b) - (a-b) = 0.$$

6) von Zahlen von der Form $(+c)$.

$$(+c) - (a-b) = +(c - a + b).$$

7) von 0.

$$0 - (a-b) = -(a-b).$$

8) von Zahlen von der Form $(f \cdot g)$.

$$(f \cdot g) - (a-b) = f \cdot g - a + b.$$

9) von Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$\frac{m}{n} - (a-b) = \frac{m - (a-b) \cdot n}{n} = \frac{m - a \cdot n + b \cdot n}{n}.$$

V. der Zahlen von der Form (+ a)

1) von einfachen Zahlen b.

$$b - (+a) = b - a.$$

2) von Zahlen von der Form $(b + c)$.

$$(b + c) - (+a) = b + c - a,$$

3) von Zahlen von der Form $(-b)$.

$$(-b) - (+a) = \left(-(b + a)\right).$$

4) von Zahlen von der Form $(b - c)$.

$$(b - c) - (+a) = b - c - a.$$

5) von Zahlen von derselben Form.

$$(+b) - (+a) = +(b - a).$$

6) von congruenten Zahlen.

$$(+a) - (+a) = 0.$$

7) von Zahlen von der Form $(f \cdot g)$.

$$(f \cdot g) - (+a) = f \cdot g - a.$$

8) von Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$\frac{m}{n} - (+a) = \frac{m - a \cdot n}{n}.$$

Subtraction

VI. der Zahl 0

1) von einfachen Zahlen.

$$a - 0 = a.$$

2) von Zahlen von der Form $(a + b)$.

$$(a + b) - 0 = a + b.$$

3) von Zahlen von der Form $(- a)$.

$$(- a) - 0 = (- a).$$

4) von Zahlen von der Form $(a - b)$.

$$(a - b) - 0 = a - b.$$

5) von Zahlen von der Form $(+ a)$.

$$(+ a) - 0 = (+ a).$$

6) von sich selbst.

$$0 - 0 = 0.$$

7) von Zahlen von der Form $(f \,.\, g)$.

$$(f \,.\, g) - 0 = (f \,.\, g).$$

8) von Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$\frac{m}{n} - 0 = \frac{m}{n}.$$

VII. der Zahlen von der Form (a . b)

1) von einfachen Zahlen.

$$c - (a \,.\, b) = c - a \,.\, b.$$

2) von Zahlen von der Form $(c + d)$.

$$(c + d) - (a \,.\, b) = c + d - a \,.\, b.$$

3) von Zahlen von der Form $(- c)$.

$$(- c) - (a \,.\, b) = \Big(- (c + a \,.\, b)\Big).$$

4) von Zahlen von der Form $(c - d)$.

$$(c - d) - (a \,.\, b) = c - d - a \,.\, b.$$

5) von Zahlen von der Form $(+ c)$.

$$(+ c) - (a \,.\, b) = \Big(+ (c - a \,.\, b)\Big).$$

6) von 0.

$$0 - (a \,.\, b) = (- a \,.\, b).$$

7) von Zahlen von derselben Form.

$$(c \,.\, d) - (a \,.\, b) = c \,.\, d - a \,.\, b.$$

8) von Zahlen derselben Form mit einem gemeinsamen Faktor $(a \,.\, c)$.

$$(a \,.\, c) - (a \,.\, b) = a \,.\, (c - b).$$

Subtraction

VII. der Zahlen von der Form (a . b)

Wenn von c Reihen mit a Einheiten b Reihen weggenommen werden, so bleiben (c — b) Reihen, d. i. a . (c — b). Ist b > c, so müssen wir das Resultat zufolge der Bestimmungen über die erweiterte Subtraktion mit einem „—" versehen. Folglich

$$(a \, . \, c) - (a \, . \, b) = \Big(- a \, . \, (b - c)\Big).$$

Unter den verschiedenen Voraussetzungen $c \gtreqless b$ sind wir durch die Definition der Subtraktion auf zwei in der Form differierende Ausdrücke für a . c — a . b geführt. Wir müssen daher prüfen, ob wir für den Fall, dass wir die Grössenverhältnisse zwischen b und c nicht kennen, sie sich aber nachher als den angewendeten Formeln zuwiderlaufend herausstellen, falsche Resultate erhalten. Angenommen also b > c und wir hätten gesetzt

$$(a \, . \, c) - (a \, . \, b) = a \, . \, (c - b),$$

dann würde (c — b) eine negative Grösse sein, und wir hätten

$$(a \, . \, c) - (a \, . \, b) = a \, . \, (- d).$$

Was ist das? (— d) kann nicht Multiplikator sein. Also würden wir durch etwas Unmögliches darauf aufmerksam gemacht, das wir die andere Formel hätten gebrauchen müssen. Die würde ergeben haben (— a . d) und das sprechen wir entweder so aus: a . (— d) sollte eigentlich seiu (— a . d), oder: a . (— d) = (— a . d). Somit erfahren wir hier, wie eine Zahl von der Form (— d) als Multiplikator zu deuten ist. — Wäre umgekehrt b < c und wir hätten die zweite Formel gebraucht $(a \, . \, c) - (a \, . \, b) = \Big(-a \, . \, (b - c)\Big)$, so wäre (b — c) = (— d), also $\Big(- a \, . \, (b - c)\Big) = \Big(- a \, . \, (- d)\Big)$, und daraus ersähen wir, dass (— a) . (— d) = + a . d gesetzt werden müsste.

9) von congruenten Zahlen.

$$(a \, . \, b) - (a \, . \, b) = a \, . \, (b - b) = a \, . \, 0 = 0.$$

10) von Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$\frac{m}{n} - (a \, . \, b) = \frac{m - a \, . \, b \, . n}{n}.$$

VIII. der Zahlen von der Form $\frac{a}{b}$

1) von einfachen Zahlen c.

$$c - \frac{a}{b} = \frac{c \, . \, b - a}{b},$$

2) von Zahlen von der Form (c + d).

$$(c + d) - \frac{a}{b} = \frac{c \, . \, b + d \, . \, b - a}{b}.$$

Subtraction

VIII. der Zahlen von der Form $\frac{a}{b}$

3) von Zahlen von der Form (— c).

$$(-c) - \frac{a}{b} = \left(-\frac{c \cdot b}{b}\right) - \frac{a}{b} = \left(-\frac{c \cdot b + a}{b}\right).$$

4) von Zahlen von der Form (c — d).

$$(c - d) - \frac{a}{b} = \frac{c \cdot b - d \cdot b - a}{b}.$$

5) von Zahlen von der Form (+ c).

$$(+c) - \frac{a}{b} = + \frac{c \cdot b - a}{b}.$$

6) von 0.

$$0 - \frac{a}{b} = \left(-\frac{a}{b}\right).$$

7) von Zahlen von der Form (c . d).

$$(c \cdot d) - \frac{a}{b} = \frac{c \cdot d \cdot b - a}{b}.$$

8) von Zahlen von derselben Form und demselben Divisor.

$$\frac{c}{b} - \frac{a}{b} = \frac{c - a}{b}.$$

Wenn $a < c$, so ist die Gleichheit der beiden Ausdrücke leicht klar. Ist aber $a > c$, so würde der Ausdruck links eine Zahl von der Form $\left(-\frac{m}{n}\right)$, der rechts hingegen eine Zahl von der Form $\frac{-m}{n}$ sein. Wir müssen daher, wenn die Allgemeinheit der Gleichung $\frac{c}{b} - \frac{a}{b} = \frac{c - a}{b}$ gewahrt werden soll, festsetzen, dass $-\frac{m}{n} = \frac{-m}{n}$. Aber da das auf dasselbe hinauskommt, als ob wir dem Bruchstrich dieselben Eigenschaften, wie der Klammer zusprechen so stimmt diese Bestimmung mit unseren früheren ganz überein.

9) von congruenten Zahlen.

$$\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0,$$

10) von Zahlen von derselben Form.

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{c \cdot b - a \cdot d}{d \cdot b}.$$

Multiplication

I. einfacher Zahlen von der Form a

1) mit congruenten Zahlen.

$a \cdot a = a^2$ (gelesen a zur zweiten scl. Potenz).

Multiplication

I. einfacher Zahlen von der Form a

2) mit Zahlen von derselben Form.

$$a \,.\, b = b \,.\, a.$$

3) mit Zahlen von der Form $(b + c)$.

$$a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c.$$

a mit $(b + c)$ multiplicieren heisst eine Zahl finden, die aus a so entstanden ist, wie $(b + c)$ aus der Einheit. Dies letztere ist aber so entstanden, dass erst b Einheiten gesetzt und dann noch c hinzugefügt sind, also

$$a \,.\, (b + c) = (a + a + \ldots + a^{b\,\text{mal}}) + (a + a + \ldots + a^{c\,\text{mal}})$$
$$= a \,.\, b + a \,.\, c.$$

Nach Addition II_3 ist gefunden

$$b \,.\, a + c \,.\, a = (b + c) \,.\, a.$$

Jetzt wissen wir, dass

$$a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c.$$

Da aber

$$a \,.\, b + a \,.\, c = b \,.\, a + c \,.\, a$$

$$a \,.\, (b + c) = (b + c) \,.\, a$$

d. h. das Gesetz von der Vertauschung der Faktoren gilt auch, wenn der eine Factor eine Zahl von der Form $(b + c)$ ist.

4) mit Zahlen von der Form $(-b)$.

$$a \,.\, (-b) = (-a \,.\, b).$$

Nach der Definition der Multiplikation ist eine Zahl $(-b)$ als Multiplikator nicht zu gebrauchen, wir würden sie daher auch nie setzen dürfen, wenn wir nicht aus Subtraktion VII_8 Aufklärung hätten, wie wir einen solchen Multiplicator zu deuten haben. Unter der dort getroffenen Festsetzung, dass durch einen negativen Multiplikator auf eine nicht sorgfältige Anwendung einer Formel aufmerksam gemacht, und dass der begangene Irrtum einfach dadurch gut gemacht wird, dass wir setzen

$$a \,.\, (-b) = (-a \,.\, b),$$

lassen wir formell den Ausdruck $a \,.\, (-b)$ bestehen.

5) mit Zahlen von der Form $(b - c)$.

$$a \,.\, (b - c) = a \,.\, b - a \,.\, c.$$

1. $b > c$. Wenn $b > c$, so ist nach der Definition der Multiplication

$$a \,.\, (b - c) = (a + a + \ldots + a^{b\,\text{mal}}) - (a + a + \ldots + a^{c\,\text{mal}})$$
$$= a \,.\, b - a \,.\, c$$
$$a \,.\, b - a \,.\, c = b \,.\, a - c \,.\, a$$
$$= (b - c) \,.\, a$$

$$a \,.\, (b - c) = (b - c) \,.\, a$$

d. h. das Gesetz von der Vertauschung der Faktoren gilt auch hier.

Multiplication

I. einfacher Zahlen von der Form a

2. b < c. Ist b < c, so haben wir

$$a \cdot (b - c) = a \cdot \Big(-(c - b)\Big)$$
$$= \Big(- a \cdot (c - b)\Big) \text{ nach Multipl. } I_4$$
$$= (- a \cdot c + a \cdot b).$$

Unter Anwendung der Regel über die Klammern fallen demnach die beiden Fälle $b \gtrless c$ in einen zusammen und es gilt die Gleichung

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

allgemein.

6) mit Zahlen von der Form (+ c).

$$a \cdot (+ c) = (+ a \cdot c) = a \cdot c.$$

Die in (+ c) enthaltenen Einheiten sind von derselben Art wie die in c symbolisch dargestellten. Daher ist (+ c) als Multiplikator zulässig.

7) mit 0.

$$a \cdot 0 = 0.$$
$$a \cdot 0 = a \cdot (b - b) = a \cdot b - a \cdot b = 0.$$

Der mannigfaltigen Entstehung der 0 aus der Einheit entsprechend, hätten wir für (b — b) setzen können (c — c), (a . c — a . c) u. s. w.

8) mit Zahlen von der Form (f . g).

$$a \cdot (f \cdot g) = a \cdot f \cdot g.$$

$$\begin{aligned} a \cdot (f \cdot g) = {} & a + a + \dots\dots + a^{\text{f mal}} \\ & + a + a + \dots\dots + a \\ & \dots\dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots\dots \\ {}^{\text{g mal}} & + a + a + \dots\dots + a \\ = {} & a \cdot f + a \cdot f + \dots + a \cdot f^{\text{g mal}}) = a \cdot f \cdot g. \end{aligned}$$

9) mit Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$a \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{n} \cdot m = \frac{a \cdot m}{n}.$$

Der Grund für das Bestehen der Gleichung $a \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{n} \cdot m$ liegt in der erweiterten Definition der Multiplication und der für $\frac{a}{n} \cdot m = \frac{a \cdot m}{n}$ in Add. VIII_9.

II. der Zahlen von der Form (a + b)

1) mit einfachen Zahlen c.

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c. \quad \text{Addition } II_3.$$

2) mit Zahlen von derselben Form.

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d.$$

Multiplication
II. der Zahlen von der Form (a + b)

3) mit congruenten Zahlen.

$$(a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

oder, indem man, dem $a \cdot a = a^2$ entsprechend, auch für $(a + b) \cdot (a + b)$ schreibt $(a + b)^2$,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

4) mit Zahlen von der Form (— c).

$$(a + b) \cdot (-c) = -a \cdot c - b \cdot c.$$

Zunächst ist $(a + b) \cdot (-c) = \Big(-(a + b) \cdot c\Big)$

$$= -a \cdot c - b \cdot c.$$

Zu demselben Aggregat $-a \cdot c - b \cdot c$ kommen wir auch, wenn wir mit (— c) multiplicieren, als ob es eine gewöhnliche Grösse wäre, und beachten, dass $+ a \cdot (-c) = -a \cdot c$ etc. ist.

5) mit Zahlen von der Form (c — d).

$$(a + b) \cdot (c - d) = a \cdot c + b \cdot c - a \cdot d - b \cdot d.$$

1. $c > d$.

$$(a+b) \cdot (c-d) = (a+b) \cdot c - (a+b) \cdot d$$
$$= a \cdot c + b \cdot c - a \cdot d - b \cdot d.$$

2. $c < d$.

$$(a+b) \cdot (c-d) = (a+b) \cdot \Big(-(d-c)\Big)$$
$$= \Big(-(a + b) \cdot (d - c)\Big)$$
$$= -a \cdot d - b \cdot d + a \cdot c + b \cdot c.$$

Somit sehen wir, dass für beide Fälle nur eine Form der Multiplikation existiert.

6) mit Zahlen von der Form (a — b).

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2.$$

Zahlenpaare, die dasselbe Bildungsgesetz zeigen, wie (a + b) und (a — b), heissen conjugierte Zahlen.

7) mit Zahlen von der Form (+ c).

$$(a + b) \cdot (+c) = a \cdot c + b \cdot c.$$

8) mit 0.

$$(a + b) \cdot 0 = 0.$$

9) mit Zahlen von der Form (f . g).

$$(a + b) \cdot (f \cdot g) = a \cdot f \cdot g + b \cdot f \cdot g.$$

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot (f \cdot g) = {} & (a + b) + (a + b) + \ldots + (a + b)^{\text{f mal}} \\ & + (a + b) + (a + b) + \ldots + (a + b) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}^{\text{g mal}} & + (a + b) + (a + b) + \ldots + (a + b)\end{aligned}$$

$$= (a \cdot f + b \cdot f) + (a \cdot f + b \cdot f) + \ldots + (a \cdot f + b \cdot f)^{\text{g mal}}$$
$$= a \cdot f \cdot g + b \cdot f \cdot g.$$

Multiplication

II. der Zahlen von der Form (a + b)

10) mit Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$(a + b) \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{n} + \frac{b \cdot m}{n}$$

$$(a + b) \cdot \frac{m}{n} = \frac{a + b}{n} \cdot m = \left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right) \cdot m =$$

$$\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right) + \left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right) + \ldots + \left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right)^{m \text{ mal}} = \frac{a}{n} \cdot m + \frac{b}{n} \cdot m$$

$$= \frac{a \cdot m}{n} + \frac{b \cdot m}{n}.$$

III. der Zahlen von der Form (— a)

1) mit einfachen Zahlen b.

$(- a) \cdot b = (- a \cdot b)$. Nach Addition III_4.

2) mit einfachen Zahlen a.

$$(- a) \cdot a = - a^2.$$

3) mit Zahlen von derselben Form.

$$(- a) \cdot (- b) = a \cdot b$$

$$(- a) \cdot (- b) = \left(- (- a) \cdot b\right) = - (- a \cdot b)$$

$$= a \cdot b.$$

4) mit einer congruenten Zahl.

$$(- a) \cdot (- a) = (- a)^2 = a^2.$$

5) mit Zahlen von der Form (b + c).

$$(- a) \cdot (b + c) = - a \cdot b - a \cdot c.$$

6) mit Zahlen von der Form (b — c).

$$(- a) \cdot (b - c) = - a \cdot b + a \cdot c.$$

7) mit 0.

$$(- a) \cdot 0 = 0.$$

8) mit Zahlen von der Form (f . g).

$$(- a) \cdot (f \cdot g) = - a \cdot f \cdot g.$$

9) mit Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$(- a) \cdot \frac{m}{n} = - \frac{a \cdot m}{n}.$$

Die Zahl, welche zu einer andern addiert, dieselbe um a n^{te} Teile vermindert, müssen wir den früheren Festsetzungen zufolge mit $\left(- \frac{a}{n}\right)$ bezeichnen. Daher nenneu wir $\left(- \frac{a}{n}\right)$ den n^{ten} Teil von (— a). Mit Rücksicht hierauf und auf die Erweiterung der Multiplication ist

Multiplication

III. der Zahlen von der Form (— a)

$$(-a) \cdot \frac{m}{n} = \left(-\frac{a}{n}\right) \cdot m$$
$$= \left(-\frac{a}{n}\right) + \left(-\frac{a}{n}\right) + \dots + \left(-\frac{a}{n}\right)^{m \text{ mal}}$$
$$= -\frac{a + a + \dots + a^{m \text{ mal}}}{n}$$
$$= -\frac{a \cdot m}{n}.$$

IV. der Zahlen von der Form (a — b)

1) mit einfachen Zahlen c.

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c. \text{ Nach Addition } IV_5.$$

2) mit Zahlen von der Form (c + d).

$$(a - b) \cdot (c + d) = a \cdot c - b \cdot c + a \cdot d - b \cdot d.$$

3) mit Zahlen von der Form (a + b).

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2.$$

4) mit Zahlen von der Form (— c).

$$(a - b) \cdot (-c) = -a \cdot c + b \cdot c.$$

5) mit Zahlen von derselben Form.

$$(a - b) \cdot (c - d) = a \cdot c - b \cdot c - a \cdot d + b \cdot d.$$

6) mit einer congruenten Zahl.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

7) mit Zahlen von der Form (+ c).

$$(a - b) \cdot (+c) = a \cdot c - b \cdot c.$$

8) mit 0.

$$(a - b) \cdot 0 = 0.$$

9) mit Zahlen von der Form (f . g).

$$(a - b) \cdot (f \cdot g) = a \cdot f \cdot g - b \cdot f \cdot g.$$

10) mit Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$(a - b) \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{n} - \frac{b \cdot m}{n}.$$

V. der Zahlen von der Form (+ a)

1) mit einfachen Zahlen b.

$$(+a) \cdot b = (+a \cdot b).$$

2) mit Zahlen von der Form (b + c)-

$$(+a) \cdot (b + c) = +(a \cdot b + a \cdot c).$$

Multiplication

V. der Zahlen von der Form (+ a)

3) mit Zahlen von der Form (— b).

$$(+ a) \,.\, (- b) = (- a \,.\, b).$$

4) mit Zahlen von der Form (b — c).

$$(+ a) \,.\, (b - c) = \Big(+ (a \,.\, b - a \,.\, c)\Big).$$

5) mit Zahlen von derselben Form.

$$(+ a) \,.\, (+ b) = (+ a \,.\, b).$$

6) mit congruenten Zahlen.

$$(+ a)^2 = (+ a^2).$$

7) mit 0.

$$(+ a) \,.\, 0 = 0.$$

8) mit Zahlen von der Form (f . g).

$$(+ a) \,.\, (f \,.\, g) = (+ a \,.\, f \,.\, g).$$

9) mit Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$(+ a) \,.\, \frac{m}{n} = \left(+ \frac{a \,.\, m}{n}\right).$$

VI. der Zahl 0

1) mit einfachen Zahlen a.

$$0 \,.\, a = 0.$$

2) mit Zahlen von der Form (a + b).

$$0 \,.\, (a + b) = 0.$$

3) mit Zahlen von der Form (— a).

$$0 \,.\, (- a) = (- 0 \,.\, a) = 0.$$

4) mit Zahlen von der Form (a — b).

$$0 \,.\, (a - b) = 0.$$

5) mit Zahlen von der Form (+ a).

$$0 \,.\, (+ a) = 0.$$

6) mit sich selbst.

$$0 \,.\, 0 = 0.$$

7) mit Zahlen von der Form (f . g).

$$0 \,.\, (f \,.\, g) = 0.$$

8) mit Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$0 \,.\, \frac{m}{n} = 0.$$

Die Definitionen der Multiplikation lassen unsere Anschauung hier im stich, da wir uns den n^{ten} Teil von 0 nicht vorstellen können. 0 war gleich

Multiplication

VI. der Zahl 0

$a - a$, ist also in gewissem Sinne eine Zahl von der Form $b - c$. Wir wissen nun aber, dass sowohl für $b > c$, als für $b < c$ die Gleichung existiert

$$(b - c) \cdot \frac{m}{n} = \frac{b - c}{n} \cdot m.$$

Indem wir daraus schliessen, dass dieselbe Gleichungsform besteht auch für $b = c$, setzen wir

$$(a - a) \cdot \frac{m}{n} = \frac{a - a}{n} \cdot m$$

und nach Anwendung der weiteren erwiesenen Regeln kommt

$$= \left(\frac{a}{n} - \frac{a}{n}\right) \cdot m$$
$$= 0 \cdot m = 0.$$

VII. der Zahlen von der Form (a . b)

1) mit einfachen Zahlen c.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = \text{etc.}$$

2) mit Zahlen von der Form $(c + d)$.

$$(a \cdot b) \cdot (c + d) = a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot d.$$

3) mit Zahlen von der Form $(- c)$.

$$(a \cdot b) \cdot (- c) = (- a \cdot b \cdot c).$$

4) mit Zahlen von der Form $(c - d)$.

$$(a \cdot b) \cdot (c - d) = a \cdot b \cdot c - a \cdot b \cdot d.$$

5) mit Zahlen von der Form $(+ c)$.

$$(a \cdot b) \cdot (+ c) = a \cdot b \cdot c.$$

6) mit 0.

$$(a \cdot b) \cdot 0 = 0.$$

7) mit Zahlen von derselben Form.

$$(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = a \cdot b \cdot c \cdot d = a \cdot b \cdot d \cdot c = \text{etc.}$$

8) mit congruenten Zahlen.

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2.$$

9) mit Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$(a \cdot b) \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot b}{n} \cdot m = \frac{a \cdot b \cdot m}{n}.$$

Der n^{te} Teil von $(a \cdot b)$ ist je nach dem Grössenverhältniss von a und b zu n verschieden zu denken. Ist b ein ganzes Vielfache, so bedeutet $\frac{a \cdot b}{n}$ ein Rechteck, welches in den Horizontalreihen a und in den Vertikalreihen $\frac{b}{n}$ Einheiten hat. Wenn a ein ganzes Vielfache von n ist, so reprä-

Multiplication

VII. der Zahlen von der Form (a . b)

sentiert $\frac{a \cdot b}{n}$ ein Rechteck mit $\frac{a}{n}$ Einheiten in der Horizontalreihe und b in den Vertikalreihen. Sind beide Zahlen a und b durch n teilbar, so können wir sowohl die eine als die andere Anschauung zu grunde legen. Dass in den beiden Rechtecken die gleiche Anzahl Einheiten enthalten ist, d. h. dass die Gleichung besteht

$$\left(\frac{a}{n}\right) \cdot b = a \cdot \left(\frac{b}{n}\right),$$

folgt daraus, dass wir z. B. die linke Seite der Gleichung mit der rechten dadurch identisch machen können, dass wir b zerlegen in $n \cdot \left(\frac{b}{n}\right)$ und die Multiplikation von n mit $\left(\frac{a}{n}\right)$ ausführen. Wenn weder a noch b durch n teilbar ist, so gehen wir auf den n^{ten} Teil der Einheit zurück.

VIII. der Zahlen von der Form $\frac{a}{b}$

1) mit einfachen Zahlen c.

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}.$$

2) mit Zahlen von der Form (c + d).

$$\frac{a}{b} \cdot (c + d) = \frac{a \cdot c}{b} + \frac{a \cdot d}{b}.$$

3) mit Zahlen von der Form (— c).

$$\frac{a}{b} \cdot (-c) = -\frac{a \cdot c}{b}.$$

4) mit Zahlen von der Form (c — d).

$$\frac{a}{b} \cdot (c - d) = \frac{a \cdot c}{b} - \frac{a \cdot d}{b}.$$

5) mit Zahlen von der Form (+ c).

$$\frac{a}{b} \cdot (+c) = \frac{a \cdot c}{b}.$$

6) mit 0.

$$\frac{a}{b} \cdot 0 = 0.$$

7) mit Zahlen von der Form (c . d).

$$\frac{a}{b} \cdot (c \cdot d) = \frac{a \cdot c \cdot d}{b}.$$

8) mit Zahlen von derselben Form.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Multiplication

VIII. der Zahlen von der Form $\frac{a}{b}$

Mit Bezug auf Addition VIII_{10} folgt

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b \cdot d} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

9) mit congruenten Zahlen.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

10) mit einer Zahl von der Form $\frac{b}{a}$.

$$\frac{a}{a} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Zahlen, deren Produkt gleich der Einheit ist, heissen reciprok.

Division

I. einfacher Zahlen von der Form a

1) durch congruente Zahlen.

$$\frac{a}{a} = 1, \text{ denn } a = 1 \cdot a.$$

2) Durch Zahlen von derselben Form.

$$a : b = (a : b) = \frac{a}{b}.$$

3) Durch Zahlen von der Form $(b + c)$.

$$a : (b + c) = \frac{a}{b + c}.$$

Unter Subtraktion I_9 haben wir gesehen, dass einem Bruchstrich bei den bestehenden Regeln dieselben Eigenschaften zukommen, wie einer Klammer, und zwar sowohl für die oberhalb als unterhalb befindlichen Aggregate. Deshalb ist in dem Ausdruck $\frac{a}{b + c}$ die Addition im Divisor ausgeführt zu denken und $\frac{a}{b + c}$ selbst ist als eine Zahl von der Form $\frac{m}{n}$ zu behandeln.

4) durch Zahlen von der Form $(- b)$.

$$a : (- b) = \left(- \frac{a}{b}\right).$$

Nach Multiplikation III_3 muss die Zahl, welche gesucht wird, negativ sein; denn sie soll, mit einer negativen multipliciert, eine absolute Zahl liefern. Die allgemeinen Betrachtungen über Division führen auf eine Zahl von der Form $\frac{m}{n}$. Aus beiden könnte man schliessen, dass die gesuchte Zahl sei $\left(- \frac{a}{b}\right)$. In der That ist

Division
I. einfacher Zahlen von der Form a

$$\left(-\frac{a}{b}\right)\cdot(-b) = -\left(\left(-\frac{a}{b}\right)\cdot b\right) = -\left((-a)\right) = a,$$

folglich

$$a : (-b) = \frac{a}{-b} = \left(-\frac{a}{b}\right).$$

5) Durch Zahlen von der Form $(b - c)$.

$$a : (b - c) = \frac{a}{b - c} = -\frac{a}{c - b}.$$

$b > c$.

$$a : (b - c) = \frac{a}{b - c}.$$

$b < c$.

$$a : \left(-(c - b)\right) = \left(-\frac{a}{c - b}\right).$$

Die Zahl $\frac{a}{b - c}$, welche wir unter der Voraussetzung $b > c$ als Resultat gefunden haben, geht in $\left(-\frac{a}{c - b}\right)$ über, wenn wir den Bruchstrich als Klammer behandeln, in $b - c$ Minuend und Subtrahend vertauschen und das — davorsetzen. Ebenso geht $-\frac{a}{c - b}$ in $\frac{a}{b - c}$ über, wenn wir ausserdem noch beachten, dass $-(-) = +$ ist.

Infolge dessen brauchen wir bei der Division von a durch $(b - c)$ nicht auf das Grössenverhältnis von b zu c zu achten, sondern können beliebig nehmen

$$\frac{a}{b - c} \text{ oder } -\frac{a}{c - b}.$$

6) durch Zahlen von der Form $(+ c)$.

$$a : (+c) = \left(+\frac{a}{c}\right).$$

7) durch Zahlen von der Form $(f \cdot g)$.

$$a : (f \cdot g) = \frac{a}{f \cdot g}.$$

8) durch Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$a : \frac{m}{n} = \frac{a \cdot n}{m} = a \cdot \frac{n}{m},$$

Denn

$$\frac{a \cdot n}{m} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot n \cdot m}{m \cdot n} = a.$$

Je grösser n im vergleich mit m ist, d. h. je kleiner die Zahl $\frac{m}{n}$ ist, um so grösser ist die Zahl $\frac{n}{m}$, also auch $a \cdot \frac{n}{m}$.

9) durch 0. $\quad a : 0 = \infty$ (unendlich gross).

Division

I. einfacher Zahlen von der Form a

Aus 8) wissen wir, dass die gesuchte Zahl um so grösser ist, je kleiner der Divisor, also wird die neue Zahl über alle Grenzen gross sein, wenn der Divisor unter jedes Maass sinkt. Da die Grösse der neuen Zahl jedes Maass überschreitet, können wir sie nicht anders als unendlich nennen und bezeichnen sie mit ∞.

II. der Zahlen von der Form (a + b)

1) durch einfache Zahlen c.

$$(a + b) : c = \frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

2) durch Zahlen von derselben Form.

$$(a + b) : (c + d) = \frac{a + b}{c + d} = \frac{a}{c + d} + \frac{b}{c + d}.$$

3) durch congruente Zahlen.

$$(a + b) : (a + b) = \frac{a + b}{a + b} = 1.$$

4) durch Zahlen von der Form (— c).

$$(a + b) : (- c) = - \frac{a + b}{c} = - \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

5) durch Zahlen von der Form (c — d).

$$(a + b) : (c - d) = \frac{a + b}{c - d} = - \frac{a + b}{d - c} = \frac{- a - b}{d - c}.$$

6) durch Zahlen von der Form (+ c).

$$(a + b) : (+ c) = \frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

7) durch 0.

$$(a + b) : 0 = \infty.$$

8) durch Zahlen von der Form (f . g).

$$(a + b) : (f \,.\, g) = \frac{a + b}{f \,.\, g} = \frac{a}{f \,.\, g} + \frac{b}{f \,.\, g}.$$

9) durch Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$(a + b) : \frac{m}{n} = (a + b) \,.\, \frac{n}{m} = \frac{a + b}{m} \,.\, n = \frac{a \,.\, n}{m} + \frac{b \,.\, n}{m}.$$

III. der Zahlen von der Form (— a)

1) durch einfache Zahlen b.

$$(- a) : b = \left(- \frac{a}{b}\right).$$

Nach Multiplikation III_9 ist $\left(- \frac{a}{b}\right) . b = (- a)$.

Division

III. der Zahlen von der Form (— a)

2) durch einfache Zahlen a.

$$(-a) : a = \left(-\frac{a}{a}\right) = (-1).$$

3) durch Zahlen von derselben Form.

$$(-a) : (-b) = \frac{a}{b}.$$

4) durch eine congruente Zahl.

$$(-a) : (-a) = \frac{a}{a} = 1.$$

5) durch Zahlen von der Form (b + c).

$$(-a) : (b + c) = -\frac{a}{b + c}.$$

6) durch Zahlen von der Form (b — c).

$$(-a) : (b - c) = -\frac{a}{b - c} = \frac{a}{c - b}.$$

7) durch Zahlen von der Form (f . g).

$$(-a) : (f \,.\, g) = \left(-\frac{a}{f \,.\, g}\right).$$

8) durch Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$(-a) : \frac{m}{n} = \left(-\frac{a \,.\, n}{m}\right).$$

9) Durch 0.

$$(-a) : 0 = (-\infty).$$

IV. der Zahlen von der Form (a — b)

1) durch einfache Zahlen c.

$$(a - b) : c = \frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

2) durch Zahlen von der Form (c + d).

$$(a - b) : (c + d) = \frac{a - b}{c + d} = \frac{a}{c + d} - \frac{b}{c + d}.$$

3) durch Zahlen von der Form (— c).

$$(a - b) : (-c) = -\frac{a - b}{c} = -\frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

4) durch Zahlen von derselben Form.

$$(a - b) : (c - d) = \frac{a - b}{c - d} = -\frac{a - b}{d - c} = \frac{b - a}{d - c}.$$

5) durch eine congruente Zahl.

$$(a - b) : (a - b) = \frac{a - b}{a - b} = 1.$$

Division

IV. der Zahlen von der Form (a — b)

6) durch Zahlen von der Form (+ c).

$$(a - b) : (+ c) = \frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

7) durch Zahlen von der Form (f . g).

$$(a - b) : (f \cdot g) = \frac{a - b}{f \cdot g} = \frac{a}{f \cdot g} - \frac{b}{f \cdot g}.$$

8) durch Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$(a - b) : \frac{m}{n} = (a - b) \cdot \frac{n}{m} = \frac{a - b}{m} \cdot n = \frac{a \cdot n}{m} - \frac{b \cdot n}{m}.$$

9) durch 0. $(a - b) : 0 = \pm \infty$, je nachdem $a \gtrless b$.

V. der Zahlen von der Form (+ a)

1) durch einfache Zahlen b.

$$(+ a) : b = \left(+ \frac{a}{b}\right).$$

2) durch Zahlen von der Form (b + c).

$$(+ a) : (b + c) = + \frac{a}{b + c}.$$

3) durch Zahlen von der Form (— b).

$$(+ a) : (- b) = \left(- \frac{a}{b}\right).$$

4) durch Zahlen von der Form (b — c).

$$(+ a) : (b - c) = \left(+ \frac{a}{b - c}\right) = \left(- \frac{a}{c - b}\right).$$

5) durch Zahlen von derselben Form.

$$(+ a) : (+ b) = + \frac{a}{b}.$$

6) durch eine congruente Zahl.

$$(+ a) : (+ a) = \left(+ \frac{a}{a}\right) = (+ 1).$$

7) durch Zahlen von der Form (f . g).

$$(+ a) : (f \cdot g) = \left(+ \frac{a}{f \cdot g}\right).$$

8) durch Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$(+ a) : \frac{m}{n} = (+ a) \cdot \frac{n}{m} = \left(+ \frac{a \cdot n}{m}\right).$$

9) durch 0.

$$(+ a) : 0 = + \infty.$$

Division

VI. der Zahl 0

1) durch einfache Zahlen a.

$$0 : a = 0.$$

2) durch Zahlen von der Form (a + b).

$$0 : (a + b) = 0.$$

3) durch Zahlen von der Form (— a).

$$0 : (-a) = 0.$$

4) durch Zahlen von der Form (a — b).

$$0 : (a - b) = 0.$$

5) durch Zahlen von der Form (+ a).

$$0 : (+a) = 0.$$

6) durch eine congruente 0.

$0 : 0 = 1$ (wenn sowohl der Dividend als der Divisor z. B. a — a).

7) durch 0 schlechtweg.

$$0 : 0 = \frac{0}{0} \text{ ist unbestimmt.}$$

8) durch Zahlen von der Form (f . g).

$$0 : (f \cdot g) = 0.$$

9) durch Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$0 : \frac{m}{n} = 0.$$

VII. der Zahlen von der Form (a . b)

1) durch einfache Zahlen c.

$$(a \cdot b) : c = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c}.$$

2) durch Zahlen von der Form (c + d).

$$(a \cdot b) : (c + d) = \frac{a \cdot b}{c + d} = \frac{a}{c + d} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c + d}.$$

3) durch Zahlen von der Form (— c).

$$(a \cdot b) : (-c) = \left(-\frac{a \cdot b}{c}\right).$$

4) durch Zahlen von der Form (c — d).

$$(a \cdot b) : (c - d) = \frac{a \cdot b}{c - d} = \left(-\frac{a \cdot b}{d - c}\right).$$

5) durch Zahlen von der Form (+ c).

$$(a \cdot b) : (+c) = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Division

VII. der Zahlen von der Form (a . b)

6) durch Zahlen von derselben Form.

$$(a \,.\, b) : (c \,.\, d) = \frac{a \,.\, b}{c \,.\, d} = \frac{a}{c \,.\, d} \,.\, b = \frac{b}{c \,.\, d} \,.\, a.$$

7) durch eine congruente Zahl.

$$(a \,.\, b) : (a \,.\, b) = \frac{a \,.\, b}{a \,.\, b} = 1.$$

8) durch Zahlen von der Form $\frac{m}{n}$.

$$(a \,.\, b) : \frac{m}{n} = (a \,.\, b) \,.\, \frac{n}{m} = \frac{a \,.\, b \,.\, n}{m}.$$

9) durch 0.

$$(a \,.\, b) : 0 = \infty.$$

VIII. der Zahlen von der Form $\frac{a}{b}$

1) durch einfache Zahlen c.

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \,.\, c}.$$

2) durch Zahlen von der Form (c + d).

$$\frac{a}{b} : (c + d) = \frac{a}{b \,.\, (c + d)}.$$

3) durch Zahlen von der Form (— c).

$$\frac{a}{b} : (-c) = \left(-\frac{a}{b \,.\, c}\right).$$

4) durch Zahlen von der Form (c — d).

$$\frac{a}{b} : (c - d) = \frac{a}{b \,.\, (c - d)} = -\frac{a}{b \,.\, (d - c)}.$$

5) durch Zahlen von der Form (+ c).

$$\frac{a}{b} : (+c) = \frac{a}{b \,.\, c}.$$

6) durch Zahlen von der Form f . g.

$$\frac{a}{b} : (f \,.\, g) = \frac{a}{b \,.\, f \,.\, g}.$$

7) durch Zahlen von derselben Form.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \,.\, \frac{d}{c} = \frac{a \,.\, d}{b \,.\, c}.$$

8) durch eine congruente Zahl.

$$\frac{a}{b} : \frac{a}{b} = \frac{a \,.\, b}{b \,.\, a} = 1.$$

9) durch 0.

$$\frac{a}{b} : 0 = \infty.$$